基礎数学選書

14

編集委員会
矢 野　健太郎
国 沢　清 典
茂 木　　 勇
石 原　　 繁
岩 堀　長 慶

計量微分幾何学

京都大学名誉教授
理学博士
松 本　誠 著

裳 華 房

JCLS 〈㈱日本著作出版権管理システム委託出版物〉

編 集 趣 旨

最近の科学技術の発展には誠に目覚しいものがあります．それにつれてその基礎であり，その手段である数学の重要性はますます増大しつつあります．

また一方，いままでは主として科学技術の方面にのみ応用をもっていると思われていた数学が，最近になって実は，人間のあらゆる社会活動を対象とする行動科学の方面にも非常に大きな応用をもっていることが明らかになってまいりました．

このように，科学技術と行動科学の２つの方面からの社会的要求はますます増大する一方ですので，大学における数学教育の比重はますます大きくなりつつあります．

しかしながら誠に残念なことに，大学の講義時間には大きな制限があるために，講義がややもすれば型通りになりがちで，学生の数も毎年増加の一途をたどっていますので，講義だけで学生が将来必要な数学をマスターするということはますます困難になりつつあるのが現状です．

このような状態のもとで，大学の講義を十分に理解し，それを活用する力を十分に身につけるには，初学者の心理も盲点も知りつくしている経験豊かな著者の手になる懇切丁寧な参考書によるのが一番よい方法です．

ややもすれば，大学生相手の書物には読者をつきはなしたような態度が多いのですが，その点を改め，読者諸君が素直に読み進むことができ，しかもそれによって厳密で豊富な知識が身につき，理論に対する真の興味がわいてくるようにと念願して企画されたのが，この「基礎数学選書」であります．

本選書は，以上の趣旨に基づいて，数学の種々の分科を１つ１つ教科書風の堅苦しさから解放された自由な立場から，できるだけ詳細に解説するという目的で，比較的多くの小冊子に分けられています．

読者諸君は，この選書のうちから諸君が必要とされるもの，興味をもたれるものを自由に選ぶことができると思います．

編集委員会は，この選書に入れた項目で，将来数学を活用しようとする人たちに必要なものはほとんど網羅していると信じます.

また，将来それを活用する場合，数学はこの選書に解説されている内容で十分役立つと確信します.

したがって，これらの選書で学習し，それらを書棚においておかれるならば，社会にでて数学を活用する場合にも大いに役立つことを信じて疑わないものであります.

昭和44年8月

矢野健太郎
国沢清典
茂木勇
石原繁
岩堀長慶

まえがき

著者は，計量がない微分幾何学は面白くないという意見を，あるソ連の老大家からベルリンで聞いて驚いたことがある．それは単にその老人の感情にすぎないので，計量のない幾何学，たとえば射影幾何学の価値を彼が認めないというわけではない．しかし，計量の概念はたしかに幾何学の中心的概念の一つであり，計量から空間の重要な性質が導かれるという意味で，計量がある方が面白いと著者も感情的にいわざるをえない．

歴史的には，ユークリッド計量，非ユークリッド計量，曲面上に誘導された計量，そうして前世紀の中頃からリーマン計量が登場したのであるが，今世紀になってフィンスラー計量，一般化されたフィンスラー計量，超面積計量，面積計量が相次いで現われた．しかし，日本語では，これらリーマン計量の一般化に基づいた幾何学の本はほとんど書かれたことがない．

この書物はフィンスラー計量に基づくフィンスラー幾何学を中心として書かれたが，それさえ十分に知れば，さらに一般な計量に基づく幾何学を知るのにそれほどの苦労は要しないようである．

著者がフィンスラー幾何学を知るようになった動機は，昭和 27 年頃であろうか，Eisenhart の最近の論文をゼミで紹介するよう蟹谷先生にいわれたことである．その論文を読んでみて，どうしても Cartan の有名なフィンスラー幾何学の小冊子を読まなければならないことに気付いた．ところが Cartan の理論は 4 つの公理に基づいて展開されるが，私にはそれがひどく天降り式に思えて，気持のうえでついて行けず，さらに変分学を勉強しなければならないことに気付いたのである．著者はそれから数年後に，ファイバーバンドルの概念を用いて Cartan 流のやり方を整理してみようと思い立ち，今日のように深入りすることになったわけである．

フィンスラー幾何学そのものを取扱った書物は，H. Rund の昭和 34 年に

発行されたもの唯一つであろう．Rund の記述は全く古典的であり，フィンスラー幾何学の普及には役に立ったが，この書物を読んだ人は，何とややこしい幾何学であることかと，悪印象をもつこと必然である．著者が思うには，この幾何学を知るには，Cartan の小冊子と Berwald のいくつかの名論文を読むことで十分である．ファイバーバンドルの理論を用いて現代風にすっきりした小冊子や長い論文もあるが，一般には入手し難い．

さて，初めの3つの章はそれぞれのテーマを簡潔に述べたものであり，後のための準備として書かれた．第4章はフィンスラー幾何学と，もっと一般な計量に基づく幾何学の歴史的概観であり，特に Cartan, Berwald，河口の仕事の紹介につとめた．第5章は共変微分法に基づいてフィンスラー接続を述べ，系統的にフィンスラー幾何学への入門を述べ，重要な特殊フィンスラー空間のいくつかを紹介するよう努力した．

この書物には，その内容上，演習問題をつけることができなかった．しかし，歴史的，挿話的な部分を豊富にして，なるべく肩がこらないようにするとともに，正確に書くスペースのなかった重要な部分にも，ある程度の概観がえられるように努力した．

この本を書くようにお薦め下さいました矢野健太郎先生，また極めて複雑な校正をお手伝い下さいました裳華房の方々に厚くお礼申し上げますと共に，この本で詳しく取扱うことができなかった高次空間論，面積空間論を主題とした本が将来日本語で書かれることを祈ります．

1975 年5月 20 日

松本　誠

目　次

1. ユークリッド平面の座標と計量

2. 曲面の計量と曲率

3. リーマン計量

4. 種々の一般計量

5. フィンスラー幾何学

1 ユークリッド平面の座標と計量

Ottó Varga はハンガリーの人，1909年に生まれ，1969年に亡くなった．60年間に 57 編の数学論文を書いたが，その約 30 編はフィンスラー幾何学（第 4，5 章参照）に関するもので，いずれも重要な文献である．彼の第 11 番目の論文“ミンコウスキー幾何学の基礎づけについて”（Acta Sci. Math. Szeged 10）の序文の中に次のような文章がある．“ミンコウスキー幾何学はふつう真直ぐな座標によって取扱われるが，これを曲がった座標で取扱えば，形式的にはフィンスラー幾何学と同様になる．それはちょうど，ユークリッド幾何学を曲がった座標で取扱えば，形式的にはリーマン幾何学と同様になるということに似ている．”これを2次元にしていえば，ふつうの平面幾何学を曲がった座標で取扱えば，形式的には空間の曲面の幾何学と同様であるということになる．

この第1章では，平面幾何学を曲がった座標で取扱ってみよう．したがって第2章への序である．しかし“似ている”をまったく同じと考えてはいけない．もし，まったく同じなら，平面と曲面を微分幾何的方法で区別することが不可能になってしまう．区別する量は第2章で登場させることにする．

§ 1．斜交座標

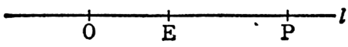
平面 π 上に1つの直交座標系をとれば，π 上の点に，その座標 (X, Y) が対応する．もっと厳密にいえば，π 上の点全体の集合を Π，また2つの順序のついた実数の組全体の集合を R^2 と表わす．直交座標系をとることによって，1対1の写像

$$\Phi : \Pi \to R^2$$

がえられ，Π の点Pに，その座標 $(X, Y) \in R^2$ が対応づけられる．

よく知られていることであるが，あらためて反省してみることによって，もっと自由な概念がえられることがわかる．すなわち**直線上の座標**を考えてみよう．1直線 l について，

（i） l 上に任意の点をとって固定し，それを O と表わす．



1-1 図

（ii）　l 上に O と異なる任意の点をとって固定し，それを E と表わす．そこで，l 上の任意の点 P に対して，長さの比

$$\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OE}}=X'$$

という負ではない実数 X' をとり，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の向きが，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ の向きと同じであるときは $X=X'$，反対であるときは $X=-X'$ という実数 X をとる．ただし，$X'=0$ のときは $X=0$ とする．この実数 X を点 P の**座標**という．

長さ OP，OE といったが，どんな単位で測ったのだろうか．cm か尺か哩か．それによって値 X' が異なる…？，異ならない．同じ換算率が分母と分子に出て消えてしまう．実は X' は，長さ OE を単位長にして測った OP の長さである．E の座標は 1 である．E を**単位点**という．O の座標は 0 で，**原点**という．したがって l 上に座標系を定めるとは，l 上の異なる 2 点からなる順序のついた組（O，E）を定めることに他ならない．

平面 π にもどり，上のような直線上の座標を知っただけで，π 上に座標を定義しようとすれば，次のように考えるのが自然であろう（1-2 図）．

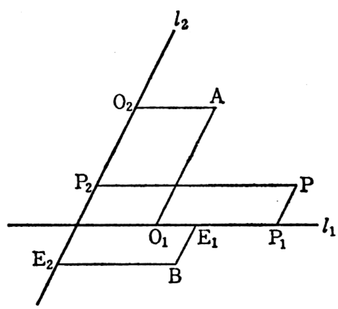
（i）　平面 π 上に平行でない 2 直線 l_i $(i=1,\ 2)$ をとって固定する．

（ii）　各 l_i 上に O_i を原点，E_i を単位点とする座標系を定める．

そこで，π 上の任意の点 P に対して，

$$\mathrm{PP}_1 /\!/ l_2, \qquad \mathrm{PP}_2 /\!/ l_1$$

という点 P_i を l_i 上にとり，P_i の l_i 上の座標を X^i とする．このとき，順序のついた組 $(X^1,\ X^2)$ を P の**座標**という．

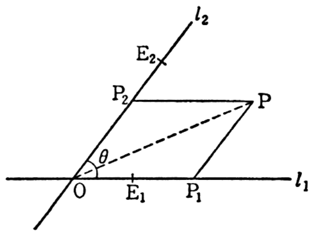


1-2 図

これはきわめて自然な定義と思われるが，複雑すぎるのではないか．たとえ

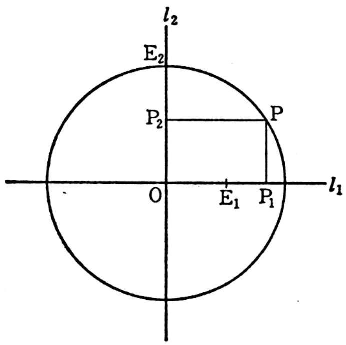
ば，座標が (0, 0), (1, 1) という点は 1-2 図のそれぞれ A, B になってしまう．この観点から，まず次の制限を加える．

(1) 各 l_i 上の原点 O_i を，l_1 と l_2 の交点 O にとる．



1-3 図

この制限をみたす座標系を **斜 交 座 標 系** という．しかしこれでもまだ複雑である．というのは，各 l_i 上の単位長 OE_i は，たとえば $OE_1 = 1\,\mathrm{cm}$, $OE_2 = 1$ 尺 でもよい．しかしそのとき，π 上の任意の 2 点間の距離は cm で測るのか尺で測るのか，それとも哩で測るのか．数学的にはまったく自由で，正確な換算率さえわかっておれば何もこまらない．実用上は別であるが．



1-4 図

例 1.1 半径 2 cm の円の方程式を作ろう．その中心を原点 O にとり，O で直交する 2 直線 l_i ($i=1, 2$) 上にそれぞれ単位点 E_i をとる．ただし

$$OE_1 = 1\,\mathrm{cm}, \qquad OE_2 = 2\,\mathrm{cm}$$

とする．円周上の任意の点 P の座標を (X, Y) とする．このことは

$$OP_1 = |X|\,OE_1 = |X|\,\mathrm{cm},$$
$$OP_2 = |Y|\,OE_2 = 2\,|Y|\,\mathrm{cm}$$

ということであるから

$$OP^2 = 4\,(\mathrm{cm}^2) = X^2 + 4\,Y^2.$$

結局，この円の方程式は

$$\frac{X^2}{4} + Y^2 = 1$$

という，ふつうの直交座標系における楕円の方程式と同じになる．

一般の斜交座標系でもよいが，

(2) 両座標軸上で単位長を同じにとる：　$OE_1 = OE_2$

という制限はたしかに便利であろう．このとき π 上の任意の 2 点間の距離もこの共通単位で測るのが自然である．

例 1.2　制限（2）をみたす斜交座標系で，1－3 図の OP の長さを求めよう．$\triangle OPP_1$ に余弦定理を用いて

$$OP^2 = OP_1{}^2 + P_1P^2 - 2(OP_1)(P_1P)\cos(\angle OP_1P).$$

両座標軸のなす角を θ とすれば，

$$= OP_1{}^2 + P_1P^2 + 2(OP_1)(P_1P)\cos\theta.$$

したがって

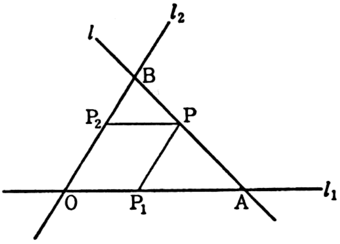
$$OP^2 = (X^1)^2 + (X^2)^2 + 2X^1X^2\cos\theta \tag{1.1}$$

という公式がえられる．

公式（1.1）において，最後の項が消えるとき，すなわち

（3）l_1 と l_2 は直交しているようにとる

というとき，ついに**直交座標系**に到達する．すなわち，直交座標系が大変便利であるのは，$\cos 90° = 0$ という原因によって，距離の公式が簡単になるからである．距離が登場しない場合には，この便利さが生じない．



1－5 図

例 1.3　斜交座標系においても，すなわち制限（2），（3）がなくても，l_1 と点 A$(a, 0)$ で，l_2 と点 B$(0, b)$ で交わる直線の方程式は

$$\frac{X^1}{a} + \frac{X^2}{b} = 1$$

である．というのは，1－5 図において

$$BP_2 : BO = P_2P : OA.$$

P(X^1, X^2) とすれば，上式は

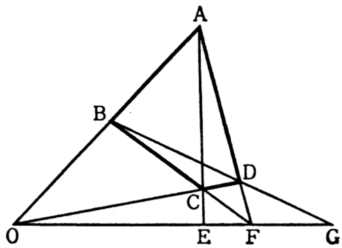
$$(b - X^2) : b = X^1 : a.$$

これから上の方程式がすぐえられよう．ここでは距離が登場せず，距離の比を取扱ったにすぎない．

この結果を利用して，次のことを証明しよう．1－6 図は四辺形 ABCD をもとにして作られているが，

$$OE : EF = OG : FG.$$

すなわち O, E, F, G が調和点列をなすということである．



1－6 図

どこにも直角がないから，特に有効な直交座標系は無さそうである．それどころか，直交座標系にこだわると大変複雑な計算になる．そこで

$$O(0,\ 0),\qquad E(1,\ 0),\qquad B(0,\ 1)$$

という斜交座標系を利用する．

$$\mathrm{F}(f,\ 0),\qquad \mathrm{G}(g,\ 0),\qquad \mathrm{A}(0,\ a)$$

とする．

$$\left.\begin{array}{ll}\text{直線 EA}: & \dfrac{X^1}{1}+\dfrac{X^2}{a}=1,\\ \text{直線 FB}: & \dfrac{X^1}{f}+\dfrac{X^2}{1}=1.\end{array}\right\}\ \rightarrow\ \text{C の座標}\ (X_c{}^1,\ X_c{}^2),$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{直線 FA}: & \dfrac{X^1}{f}+\dfrac{X^2}{a}=1,\\ \text{直線 GB}: & \dfrac{X^1}{g}+\dfrac{X^2}{1}=1.\end{array}\right\}\ \rightarrow\ \text{D の座標}\ (X_d{}^1,\ X_d{}^2).$$

計算してすぐ

$$X_c{}^1 : X_c{}^2 = f(a-1) : a(f-1),$$
$$X_d{}^1 : X_d{}^2 = fg(a-1) : a(g-f)$$

がわかる．原点 O と C，D が一直線上にある条件は

$$X_c{}^1 : X_c{}^2 = X_d{}^1 : X_d{}^2$$

であり，これから

$$1 : (f-1) = g : (g-f)$$

という，証明すべき式がえられる．

§ 2.　斜交座標系とフレーム

1-3 図は一般の斜交座標系を表わしたものであるが，その原点 O と両単位点 E_1, E_2 とは同じ直線上にはない．逆に，平面 π 上にあって，同じ直線上にない 3 点をとれば，それらをある順に O，E_1，E_2 と名づけて，斜交座標系が作れるわけである．

ベクトルを用いていえば次のようである．π 上に点 O と，2 つの 1 次独立なベクトル $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ をとる．このとき，π 上の任意の点 P に対して，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は $\boldsymbol{e}_1$ と $\boldsymbol{e}_2$ の一次結合：

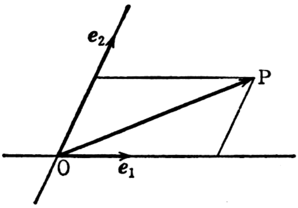
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = X^1\boldsymbol{e}_1 + X^2\boldsymbol{e}_2 \tag{2.1}$$

として一意的に表わされる．この $(X^1,\ X^2)$ が P の斜交座標である．この組 $(\mathrm{O};\ \boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2)$ を**フレーム**という．

このフレームという概念には，座標軸も単位点も直接には現われてこないが，

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}_i} = \boldsymbol{e}_i, \qquad i = 1,\ 2$$

という点 E_i をとれば，E_i は座標軸である直線 $l_i = \mathrm{OE}_i$ の上の単位点である．フレームという概念は，曲がった座標系を考える場合には大変役に立つ．



1-7 図

(2.1) により

$$(\overrightarrow{\mathrm{OP}})^2 = (X^1)^2 \boldsymbol{e}_1{}^2 + 2X^1X^2\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 + (X^2)^2\boldsymbol{e}_2{}^2.$$

したがって

(2.2) $$g_{ij} = \boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j, \qquad i,\ j = 1,\ 2$$

という内積をとれば，

(2.3) $$(\overrightarrow{\mathrm{OP}})^2 = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij} X^i X^j$$

と表わされる．これが一般の斜交座標系に関する (1.1) と同様の公式であり，

(2.4) $$\sqrt{g_{11}} = |\boldsymbol{e}_1|, \qquad \sqrt{g_{22}} = |\boldsymbol{e}_2|.$$

また，$g_{12} = g_{21} = \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$ であるから，座標軸のなす角を θ とすれば，

(2.5) $$g_{12} = g_{21} = \sqrt{g_{11}g_{22}}\cos\theta.$$

ここで，今後 (2.3) のような式中の総和記号 Σ は書かず，単に

(2.3′) $$(\overrightarrow{\mathrm{OP}})^2 = g_{ij}\,X^iX^j$$

とすることにしよう．このことを**アインシュタインの summation convention** という．

Albert Einstein (1879～1955) は，同僚である幾何学者 M. Grossmann の協力をえて，1916 年に一般相対性理論を発表したが，それは 4 次元リーマン空間の理論に基づいて展開された．Einstein は米国で Grossmann の死 (1936 年) を知らされたとき，チューリッヒにいる未亡人へ長い手紙を書いた．その中に“それから 10 年ほど後に，一般相対性理論の定式化を行なった，熱にうかされたような共同研究”という一節がある．1916年に発表された上記の論文の §6 に，“記号の簡易化”として次のように書かれている．

本節に出てきた式を眺めると，次のことがすぐにわかる．すなわち Σ 記号の次に出てくる数式に 2 度現われる添字については，必ず和をとるということである．ま

た，和をとる添字は 2 度出てくるものに限られている．そこで，これからは和の記号 Σ を省いても，不都合は起きないであろう． それゆえ， これからは次の規則を用いることにする． 1 つの数式の 1 つの項の中に 2 回出てきた添字については，特別に注意がないかぎり，必ず 1 から 4 までの和をとるものとする． ……．
Einstein の一般相対論では，空間の次元は 4 であるから， 1 から 4 までであった．この章では 2 次元の平面を考えているから， 1 から 2 までである．第 3 章では 1 から一般の自然数 n までになるが，このような区別は，何を考えているかによって自然にわかる．たとえば，空間の直交座標 (x, y, z) に関する 2 次曲面の方程式

$$ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2eyz+2fzx+gx+hy+iz+j=0$$

は，(x, y, z) を (x^1, x^2, x^3) と書けば，単に

$$a_{ij}x^ix^j+a_ix^i+a=0$$

と表わされる．この際は 1 から 3 まで加えるのである．(2.1) も

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=X^i\boldsymbol{e}_i \tag{2.1'}$$

と書ける．

平面 π 上のベクトルを考えても同様である． ベクトル $\boldsymbol{u}$ は $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ の 1 次結合として一意的に

$$\boldsymbol{u}=U^i\boldsymbol{e}_i \tag{2.6}$$

と表わされる．(U^1, U^2) が考えている斜交座標系に関する $\boldsymbol{u}$ の成分である．もう 1 つのベクトル $\boldsymbol{v}=V^i\boldsymbol{e}_i$ との内積は

$$\boldsymbol{uv}=(U^i\boldsymbol{e}_i)(V^j\boldsymbol{e}_j)$$

であるから，(2.2) により

$$\boldsymbol{uv}=g_{ij}U^iV^j \tag{2.7}$$

と表わされる．

もう 1 つの斜交座標系が与えられたとし， それがフレーム $(\bar{\mathrm{O}};\ \bar{\boldsymbol{e}}_1,\ \bar{\boldsymbol{e}}_2)$ で作られたとしよう．$\bar{\mathrm{O}}$ は点であるから，(2.1) のように

$$\overrightarrow{\mathrm{O\bar{O}}}=X_0{}^i\boldsymbol{e}_i$$

と表わされ，また $\bar{\boldsymbol{e}}_a$ $(a=1, 2)$ はベクトルであるから，(2.6) のように

$$\bar{\boldsymbol{e}}_a=e_a{}^i\boldsymbol{e}_i \tag{2.8}$$

と表わされる．したがってベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ について

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{O\bar{O}}}+\overrightarrow{\mathrm{\bar{O}P}}$$

$$=X_0{}^i e_i+\bar{X}^a \bar{e}_a=X_0{}^i e_i+\bar{X}^a(e_a{}^i e_i).$$

これを (2.1′) とくらべて

$$X^i=X_0{}^i+\bar{X}^a e_a{}^i. \tag{2.9}$$

これが，考えている2つの斜交座標系に関する点の座標 $(X^1,\ X^2)$, $(\bar{X}^1,\ \bar{X}^2)$ の間の関係式である．ベクトル $\boldsymbol{u}$ の成分 $(U^1,\ U^2)$, $(\bar{U}^1,\ \bar{U}^2)$ についても同様にして

$$U^i=\bar{U}^a e_a{}^i \tag{2.10}$$

がえられよう．

(2.8) は $\bar{\boldsymbol{e}}_a$ を $\boldsymbol{e}_i$ で表わしたのであるが，逆に $\boldsymbol{e}_i$ も $\bar{\boldsymbol{e}}_a$ で表わされよう．それを

$$\boldsymbol{e}_i=\bar{e}_i{}^a\bar{\boldsymbol{e}}_a$$

とする．したがって

$$\bar{\boldsymbol{e}}_a=e_a{}^i\boldsymbol{e}_i=e_a{}^i\bar{e}_i{}^b\bar{\boldsymbol{e}}_b.$$

(この右辺では $\sum_i\sum_b$ があることに注意)．ゆえに**クロネッカーの δ** といわれる記号

$$\delta_a^b=1\quad(a=b),\qquad \delta_a^b=0\quad(a\neq b)$$

を用いて上式を

$$\delta_a^b\bar{\boldsymbol{e}}_b=(e_a{}^i\bar{e}_i{}^b)\,\bar{\boldsymbol{e}}_b$$

と書けば，

$$e_a{}^i\bar{e}_i{}^b=\delta_a^b.$$

この式は行列 $(e_a{}^i)$ がその逆行列 $(\bar{e}_i{}^b)$ をもつことを示し，したがって $(e_a{}^i)$ は正則である．

Leopold Kronecker (1823～1891) は一般には代数学者として有名であるが，数学のすべての分野にわたって優れた業績を残した．集合論の，当時としては斬新な論法を認めず，“自然数は神が創りたもうた．その他は人の業にすぎない”と主張して，集合論の創始者 G. Cantor を悩ませたということである．

上述のことは，その逆の方が重要である．

定理 1つの斜交座標系（すなわち，フレーム（O; e_1, e_2））を与えたとき，点Oを原点とするすべての斜交座標系の集合 $\mathscr{F}$ と，すべての2次正則行列の集合 $\mathscr{R}$ とが1対1に対応する．$(e_a{}^i) \in \mathscr{R}$ に対応する $\mathscr{F}$ の要素は，(2.8) で与えられる $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ をもつフレーム（O; $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$）から作られる斜交座標系である．

なぜかといえば，$(e_a{}^i)$ の正則性から，(2.8) の $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ の1次独立性がえられるからである．

(2.8) から

$$\bar{e}_a\bar{e}_b = (e_a{}^i e_i)(e_b{}^j e_j) = e_a{}^i e_b{}^j g_{ij}.$$

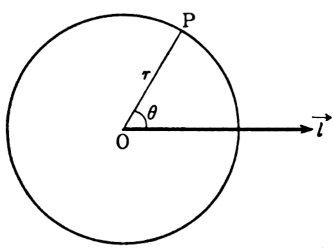
ゆえに

$$\bar{g}_{ab} = e_a{}^i e_b{}^j g_{ij} \tag{2.11}$$

がえられる．

§3. 極 座 標

これまでの座標系は斜交ではあるが，直線を座標軸としてもっていた．もっと一般な座標系を考えるために，よく知られた極座標系について少し反省してみよう．



1-8 図

平面 π 上に任意の点 O と，O から出る半直線 $\vec{l}$ をとっておく．π 上の任意の点 P に対して，OP $= r$ と，O の回りに $\vec{l}$ を“時計の針と反対向きに回して”初めて P を通るようにするまでに要した角を θ（ラジアン）とするとき，2実数の組 (r, θ) を，点 O を**極**，$\vec{l}$ を**原線**とする極座標系に関する P の**極座標**という．

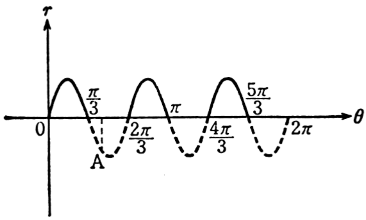
この定義によれば，

$$r \geqq 0, \qquad 0 \leqq \theta < 2\pi$$

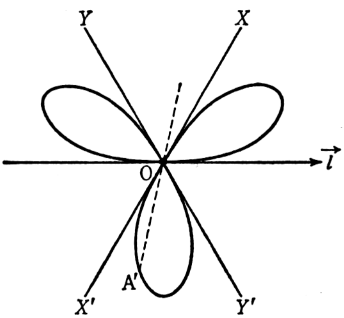
であるが，$r=0$（P が極 O に一致する）の場合には θ が決まらないでこまる．したがって，極座標を考える場合には極を除く方が具合がよく，$r>0$ で

あるとしてよい.

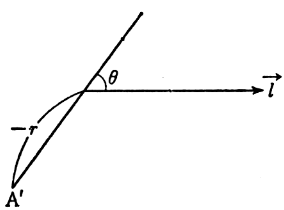
“時計の針…” は，地球上のすべての国で統一されているので具合よく用いられるが，数学の定義に時計を借用してくるのでは困る．要するに左回りか右回りかどちらかを正の回転と定めて，その回転をさせればよい.



1-9 図



1-10 図



1-11 図

例 1.4　$r=\sin 3\theta$ のグラフを考えよう．θ を横座標，r を縦座標にとってグラフを書けば 1-9 図となる．上のように $r>0$ とすれば，点線で示した

$$\frac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\frac{2\pi}{3}$$

などは考える必要がない．これから，極座標系に関して 1-10 図のようなクローバがえられる（極 O を除く）．これには切れ目が無いが，1-9 図では（点線部分は除くから）切れ目がある．この不調和を除くために，$r<0$ のところ（たとえば 1-9 図の点 A）を，そのときの角 θ に対応する動径を，O を越えて反対に延長して，その上に $-r=\mathrm{OA'}$ ととり，この点 A′ (1-10 図) を考える．そうすれば，

$$\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{2\pi}{3}$$

のときには，$\angle XOY$ の中ではなく，その対頂角 $\angle X'OY'$ の中にグラフが現われる．このようにして，1-9 図（点線部分も考える）の曲線に対応して，1-10 図ではクローバの曲線を2回まわったものがえられる（原点を除く).

一般にこのように，1-11 図のように $r<0$ も考えられる．角 θ を任意の実数に拡張することはよく知られている．このようにして，r も θ も任意の実数としてよいが，$r=0$ だけは具合がわるいのである．このことは次の定理から明らかになる．

定理（写像定理）　2変数 u, v の関数 $x=f(u, v)$, $y=g(u, v)$

が，$(u,\ v)$ - 平面のある領域 D で定義されていて，ともに微分可能であり，ヤコビアン行列式

$$J(u,\ v)=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

が点 $(u_0,\ v_0)\in D$ で 0 でないとする．このとき，これらの関数は，$(u_0,\ v_0)$ の適当な近傍 D_0 と，$(x,\ y)$ - 平面の点 $(x_0=f(u_0,\ v_0),\ y_0=g(u_0,\ v_0))$ の適当な近傍 E_0 との間の 1 対 1 の写像を与える．

したがって，対応 $D_0\to E_0$ が $x=f(u,\ v)$，$y=g(u,\ v)$ で表わされるように，逆対応 $E_0\to D_0$ が，$(x,\ y)$ の関数 $u=\varphi(x,\ y)$，$v=\psi(x,\ y)$ で与えられ，逆であるから，$x=f$，$y=g$ を u，v について解いたものが $u=\varphi$，$v=\psi$ である．

証明は省略するが，この定理を直交座標 $(x,\ y)$ と極座標 $(r,\ \theta)$ に適用してみよう．$(u,\ v)=(r,\ \theta)$ とし，

$$x=r\cos\theta,\qquad y=r\sin\theta$$

より，ヤコビアン行列式は

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}=r.$$

ゆえに $r_0\neq 0$ なら，$(x,\ y)$ と $(r,\ \theta)$ が，$(x_0,\ y_0)$，$(r_0,\ \theta_0)$ の近傍で 1 対 1 に対応する．$(x,\ y)$ は平面上の点と明らかに 1 対 1 に対応するから，

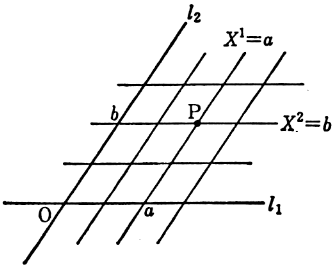
定　理　$(r,\ \theta)$ - 平面上の点 $(r_0,\ \theta_0)$ の適当な近傍で，$(r,\ \theta)$ と平面上の点とが 1 対 1 に対応する．ただし $r_0\neq 0$ とする．

このように，極座標系では，異端者である点（極）がちょうど1つある．斜交座標系には異端者はいなかったが．

上の解析的な写像定理によらずに，もっと直観的に，極の異端ぶりを示すこともできる．斜交座標 $(X^1,\ X^2)$ で，方程式

$$X^1=a,\qquad X^2=b \tag{3.1}$$

(a, b は定数) はそれぞれ座標軸 l_2, l_1 に平行な直線を表わし, a が動くと l_2 に平行な直線族 $F_A=\{l_a\}$ がえられる. 同様に l_1 に平行な直線族 $F_B=\{l_b\}$ がえられる. こうして平面 π をすきまなくおおう 2 系の直線族がえられ, 点 P の座標が (a, b) であるとは, P を F_A の l_a, F_B の l_b が通っているということである. (このことを, 平面 π が網ですきまなくおおわれているということにしよう. すきまのない網はなかろうが).

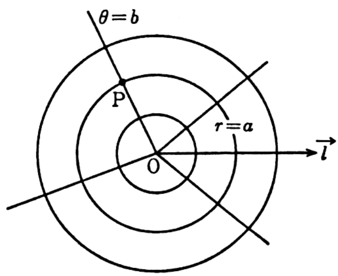


1-12 図

同様のことを極座標系についてみよう. 方程式

(3.2)　　$r=a,\qquad \theta=b$

で表わされる曲線族 $F_A=\{C_a\}$, $F_B=\{C_b\}$ のうち, C_a は O を中心とし半径 a の円であり, C_b は O を通る半直線である. 点 O 以外では, これら 2 系の曲線族がまた網を作っている. しかし点 O は具合が悪い. O を通る円 C_a は無く, 逆に, どの C_b も O を通る.



1-13 図

網といったのは, どの点をも F_A, F_B のちょうど 1 つの曲線が通っているということである. 斜交座標系, 極座標系で a, b は特別の幾何的意味があったが, 要するに曲線族 F_A, F_B のそれぞれ 1 つの曲線を表わす何かあるパラメーターであれば, P にそのパラメーターの値の組 (a, b) を対応させて, それを座標と考えることができよう.

§ 4. 曲線座標

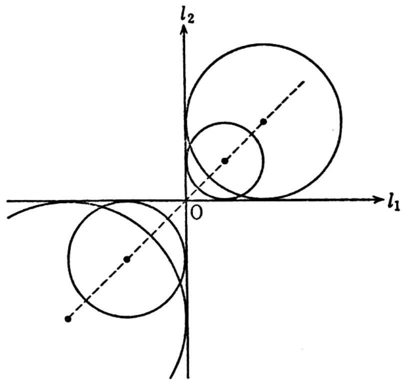
これまでの考えを一般化しよう. そのために, 平面 π 上の曲線族について述べておく. π 上に 1 つのパラメーター t に依存して与えられた (このことを "∞^1 の" という) 曲線の集まりを曲線族という. それは直交座標 (X^1, X^2)

を用いて

$$\text{(4.1)} \qquad F(X^1,\ X^2;\ t)=0$$

と表わされる．F は 3 変数 X^1, X^2, t の関数であり，t をある値 $t=a$ に固定して，X^1, X^2 の関数関係と考えたとき，(4.1) はある曲線 C_a の方程式である．このように，(4.1) は各 t に対してえられる曲線 C_t の族 $\{C_t\}$ を与えるとみられる．

例 1.5 $F(X^1,\ X^2;\ t)=(X^1-t)^2+(X^2-t)^2-t^2=0$. これは，中心が $(t,\ t)$ で半径が $|t|$ の円の族を表わし，1-14 図で与えられる．



1-14 図

さて，曲線座標系を与えることは，前節の意味で 2 系の曲線族で作られた網を平面 π に張ることであるが，これをまず厳密に定義しよう．§1 で R^2 という集合を考えた．これは 2 実数の順序のついた組 $(x,\ y)$ の全体であった．そこで，平面 π のある開集合 D と，R^2 のある開集合 $\varDelta$ との間に 1 対 1 の対応 $f:D\to\varDelta$ が与えられたとき，f を D 上の **曲線座標系**（または**局所座標系**）という．

これに対して，π 上の直交座標系を用いよう．これは 1 対 1 の対応 $\varPhi:\varPi\to R^2$ であった．ここに $\varPi$ は平面 π 上の点全体の集合（π そのものといってもよい）とする．$\varPhi$ を D へ制限したものを $\varPhi_0:D\to\varDelta_0$ とする．このとき f と $\varPhi_0$ の逆 $\varPhi_0^{-1}$ とを合成して

$$f\cdot\varPhi_0^{-1}:\varDelta_0\to\varDelta$$

がえられて，これもまた 1 対 1 であり，$\varDelta_0$ も $\varDelta$ も R^2 の部分であるから，$f\cdot\varPhi_0^{-1}$ は 2 変数 X^1, X^2 の 2 つの関数 f^1, f^2 を用いて

$$\text{(4.2)} \qquad x^1=f^1(X^1,\ X^2), \qquad x^2=f^2(X^1,\ X^2)$$

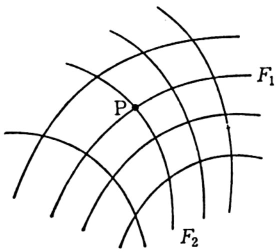
と表わされる．$(X^1,\ X^2)\in\varDelta_0$ が与えられたとき，$\varPhi_0^{-1}$ によって，これを直交座標とする D の点 P が定まり，f によって P が $(x^1,\ x^2)\in\varDelta$ に移さ

れるわけである．(x^1, x^2) を，曲線座標系 f による点 P の**座標**という．

逆に，(4.2) によって2つの関数 x^1, x^2 が与えられたとき，§3 の写像定理により，ヤコビアン行列式

$$J(x^1, x^2) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial X^1}{\partial x^1} & \dfrac{\partial X^2}{\partial x^1} \\ \dfrac{\partial X^1}{\partial x^2} & \dfrac{\partial X^2}{\partial x^2} \end{vmatrix} \tag{4.3}$$

が，ある点 $P_0(X_0{}^1, X_0{}^2)$ で0でなければ，この (x^1, x^2) は，P_0 のある近傍における曲線座標と考えられる．



1-15 図

(4.2) の第1式で x^1 をパラメーター t とみれば，(4.1) により，π 上の曲線族 F_1 がえられ，同様に (4.2) の第2式から曲線族 F_2 がえられる．点 P の曲線座標が (x^1, x^2) であるということは，F_1 の $t=x^1$ である曲線と，F_2 の $t=x^2$ である曲線とが点 P を通るということである．

例 1.6　直交座標 (X^1, X^2) について，原点 O を頂点とする2つの放物線族

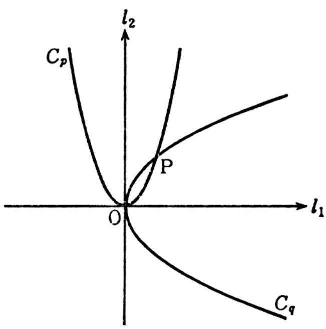
C_p:　$X^2 = p(X^1)^2$,

C_q:　$X^1 = q(X^2)^2$

が与えられたとする．点 $P(X^1, X^2)$ を通る C_p, C_q は上式を連立させて，

$$p = \frac{X^2}{(X^1)^2}, \qquad q = \frac{X^1}{(X^2)^2}$$

なる p, q によって定まるから，P が直交座標軸上になければ，P に対して組 (p, q) が定まり，したがって，(p, q) は曲線座標ということができる．



1-16 図

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial p}{\partial X^1} & \dfrac{\partial q}{\partial X^1} \\ \dfrac{\partial p}{\partial X^2} & \dfrac{\partial q}{\partial X^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\dfrac{2X^2}{(X^1)^3} & \dfrac{1}{(X^2)^2} \\ \dfrac{1}{(X^1)^2} & -\dfrac{2X^1}{(X^2)^3} \end{vmatrix} = \frac{3}{(X^1X^2)^2}$$

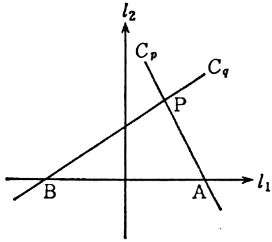
であるから，逆行列式の値は

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial X^1}{\partial p} & \dfrac{\partial X^2}{\partial p} \\ \dfrac{\partial X^1}{\partial q} & \dfrac{\partial X^2}{\partial q} \end{vmatrix} = \frac{(X^1X^2)^2}{3}.$$

これが (4.3) に相当するから，上記のように，直交座標軸上の点を除けば，確かに1対1で，曲線座標系である．p, q の値は 0 でなければ任意である．

例 1.7 曲線座標系といっても，2系の曲線族 F_1, F_2 がともに直線であるが，しかも斜交座標でないものも考えられる．たとえば，直交座標 (X^1, X^2) に関して，点 A(1, 0)，点 B(−1, 0) を通る直線族

$$C_p: \quad X^2 = p(X^1 - 1),$$
$$C_q: \quad X^2 = q(X^1 + 1)$$



1-17 図

をとろう．このとき

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial p}{\partial X^1} & \dfrac{\partial q}{\partial X^1} \\ \dfrac{\partial p}{\partial X^2} & \dfrac{\partial q}{\partial X^2} \end{vmatrix} = \frac{-2X^2}{(X^1+1)^2(X^1-1)^2}$$

であるから，2直線 $X^1 = \pm 1$ と l_1 軸 ($X^2 = 0$) 上の点を除けば，(p, q) は曲線座標である．

図形が同じでも，C_p, C_q をそれぞれ y 軸上の切片 u, v で

$$C_u: \quad \frac{X^1}{1} + \frac{X^2}{u} = 1,$$
$$C_v: \quad \frac{X^1}{-1} + \frac{X^2}{v} = 1$$

と表わすことができる．このとき (u, v) はまた曲線座標で，(p, q) と同じ範囲で成り立つ．実は $p = -u$, $q = v$ にすぎない．さらに C_p, C_q が直線 $l: X^2 = 1$ と交わる点の X^1 座標 r, s を考えれば，

$$r = \frac{1}{p} + 1, \qquad s = \frac{1}{q} - 1.$$

この (r, s) も曲線座標とみられる．

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial X^1} & \dfrac{\partial s}{\partial X^1} \\ \dfrac{\partial r}{\partial X^2} & \dfrac{\partial s}{\partial X^2} \end{vmatrix} = -\frac{2}{(X^2)^3}$$

であるから，今度は (r, s) が座標と考えられる範囲は直線 l_1 上の点だけを除けばよい．

これらの例からわかるように，曲線座標系とは，2系の曲線族 F_1, F_2 と，各族のそれぞれの曲線を表わすパラメーター x^1, x^2 を与えることによって定

まり，F_1, F_2 は同じでも，パラメーターの取り方はいくらでもある．

§5. 曲線座標系のフレーム

斜交座標系に関するベクトルの成分は，(2.6) の (U^1, U^2) で与えられた．しかし，高校では“極座標系に関する成分”は教えない．一般の曲線座標系でもベクトルの成分が考えられることを示そう．

まず平面 π 上の**ベクトル野**という概念を与えよう．これは π 上の点 P を独立変数とする π 上のベクトルのことである．P に対応するベクトル $\boldsymbol{u}(\mathrm{P})$ を，P を始点としてえがけば，π 上の各点に，その点を始点とするベクトルが対応づけられているということである．1つの直交座標 (X^1, X^2) をとれば，$\boldsymbol{u}$ のこれに関する成分 (U^1, U^2) がえられ，したがって，$U^i(i=1, 2)$ は，その始点の座標 (X^1, X^2) の関数である．そこで微分可能であれば $\partial U^i/\partial X^j$ が考えられるから，この直交座標系に関して，成分が

$$\left(\frac{\partial U^1}{\partial X^j}, \frac{\partial U^2}{\partial X^j}\right)$$

で与えられるベクトルがえられる．これを

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial X^j}=\left(\frac{\partial U^1}{\partial X^j}, \frac{\partial U^2}{\partial X^j}\right) \tag{5.1}$$

と表わす．

以上のことは，斜交座標 (X^1, X^2) について考えてもまったく同じことである．

さて，斜交座標 (X^1, X^2) に関し，点 P にベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を対応させるベクトル野 $\boldsymbol{r}$ を考えよう．その成分は P の座標 (X^1, X^2) と同じであるから

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial X^1}=(1, 0), \qquad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial X^2}=(0, 1)$$

となり，これはこの斜交座標系を作っているフレーム $(\mathrm{O}; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ のベクトル $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ に他ならない．実は O でなくても，任意の固定点 A をとり，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ のかわりに $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を考えても同様である．というのは，$\mathrm{A}(a, b)$ とすれば，

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial X^1}=\left(\frac{\partial}{\partial X^1}(X^1-a),\ \frac{\partial}{\partial X^1}(X^2-b)\right)=(1,\ 0).$$

ゆえに，いま考えたベクトル野を，固定始点を書かずに単に $\overrightarrow{\mathrm{P}}$ と表わそう．こうして，斜交座標系では

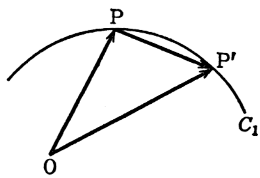
$$\frac{\partial \overrightarrow{\mathrm{P}}}{\partial X^i}=\boldsymbol{e}_i \tag{5.2}$$

となった．

この式 (5.2) を任意の曲線座標 $(x^1,\ x^2)$ に一般化して，

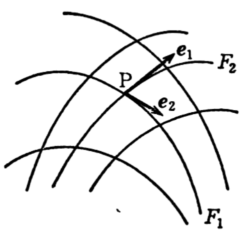
$$\frac{\partial \overrightarrow{\mathrm{P}}}{\partial x^i}=\boldsymbol{e}_i \tag{5.3}$$

によって，フレーム $(\mathrm{P};\ \boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2)$ が考えられる．これの幾何的意味を述べよう．曲線座標系の 1 つの曲線族 F_1 に属する ある曲線 C_1 を考える．C_1 上では x^1 が固定され，x^2 だけが動く．よって C_1 上の 2 点 $\mathrm{P}(x^1,\ x^2)$，$\mathrm{P}'(x^1,\ x^2+\Delta x^2)$ をとれば



1-18 図

$$\overrightarrow{\mathrm{PP}'}=\overrightarrow{\mathrm{OP}'}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}=\Delta\boldsymbol{r}.$$



1-19 図

これから

$$\lim_{\Delta x^2\to 0}\overrightarrow{\mathrm{PP}'}=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^2}=\boldsymbol{e}_2.$$

したがって，$\boldsymbol{e}_2$ は C_1 に接するベクトルである．同様に $\boldsymbol{e}_1$ は曲線族 F_2 の曲線に接するベクトルである（斜交座標系についてもそうであった）．

直交座標 $(X^1,\ X^2)$ を用いよう．点 P の座標を $(X^1,\ X^2)$ とすれば，$\boldsymbol{e}_i$ の成分は，(5.3) により

$$\boldsymbol{e}_i=\left(\frac{\partial X^1}{\partial x^i},\ \frac{\partial X^2}{\partial x^i}\right).$$

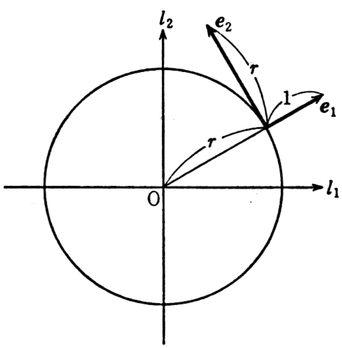
したがって (4.3) の 2 次の行列式の第 1 行ベクトルが $\boldsymbol{e}_1$ の，第 2 行ベクト

ルが e_2 の成分である．したがって線形代数学において知られているように，(4.3) のヤコビアンが 0 でないとは，e_1, e_2 が 1 次独立であるということであり，したがって $(\mathrm{P}; e_1, e_2)$ はまさにフレームである．

P を始点とする任意のベクトル u に対し，このフレーム $(\mathrm{P}; e_1, e_2)$ のベクトルを用いて

$$u = u^i e_i \tag{5.4}$$

という 2 実数の組 (u^1, u^2) がちょうど 1 つ定まる．これを，考えている曲線座標系に関するベクトル u の**成分**という．曲線座標系のフレーム $(\mathrm{P}; e_1, e_2)$ は各点 P で定まり，P が変化すれば e_1, e_2 も一般に変化するであろう．したがってベクトルの成分といっても，P を始点とするベクトルについてだけ考えるのである．（平面上ではどうでもよいが，曲面上ではこのように制限すべきである．§10 参照）．



1-20 図

例 1.8 極座標 (r, θ) を考えよう．
$(r, \theta) = (x^1, x^2)$ とする．

$$X^1 = r\cos\theta, \qquad X^2 = r\sin\theta$$

より

$$e_1 = \left(\frac{\partial X^1}{\partial r}, \frac{\partial X^2}{\partial r}\right) = (\cos\theta, \sin\theta),$$

$$e_2 = \left(\frac{\partial X^1}{\partial \theta}, \frac{\partial X^2}{\partial \theta}\right) = (-r\sin\theta, r\cos\theta).$$

e_1, e_2 は 1-20 図のようで，$|e_1| = 1$, $|e_2| = r$ である．P におけるベクトル u について

$$u = u^1(\cos\theta, \sin\theta) + u^2(-r\sin\theta, r\cos\theta).$$

ゆえに直交座標 (X^1, X^2) に関する u の成分を (U^1, U^2) とすれば，

$$U^1 = u^1\cos\theta - u^2 r\sin\theta, \qquad U^2 = u^1\sin\theta + u^2 r\cos\theta.$$

一般に

$$\begin{aligned} u &= u^1 e_1 + u^2 e_2 \\ &= u^1\left(\frac{\partial X^1}{\partial x^1}, \frac{\partial X^2}{\partial x^1}\right) + u^2\left(\frac{\partial X^1}{\partial x^2}, \frac{\partial X^2}{\partial x^2}\right) \\ &= (U^1, U^2) \end{aligned}$$

より

$$U^i = u^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \tag{5.5}$$

がえられる．この関係式の逆は明らかに

$$u^i = U^j \frac{\partial x^i}{\partial X^j} \tag{5.6}$$

である．

§ 6.　クリストフェルの記号

斜交座標系において，(2.2) で与えた g_{ij} は定数であった．このことはまた，1-19 図を斜交座標系について書いてみればわかる．そのとき，フレーム (P; $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$) の $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ は原点 O におけるそれらを平行移動させたものにすぎないから．一般の曲線座標系ではこれら $\boldsymbol{e}_i$ が点 P に応じて変化しよう．したがって

$$g_{ij} = \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j \tag{6.1}$$

は座標 x^1, x^2 の関数であろう．(5.4) から，もう 1 つのベクトル $\boldsymbol{v} = v^i \boldsymbol{e}_i$ との内積 $\boldsymbol{uv}$ は

$$\boldsymbol{uv} = g_{ij} u^i v^j \tag{6.2}$$

で与えられることがわかる．この $g_{ij}(x^1, x^2)$ を，考えている曲線座標系の**基本量**という．g_{ij} は $\boldsymbol{e}_i$ の成分を用いて

$$g_{ij} = \frac{\partial X^h}{\partial x^i} \frac{\partial X^h}{\partial x^j} \tag{6.1'}$$

と表わされる ($\sum_h$ を省略)．ここで (X^h) は直交座標であったが，(x^i) を斜交座標 $(\overline{X}^i)$ とすれば，(2.9) により $\partial X^h / \partial \overline{X}^i = e_i{}^h$ となり定数であるから，g_{ij} もまた定数である．

この関数 g_{ij} の偏微係数を考えよう．(6.1′) より

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \frac{\partial^2 X^h}{\partial x^i \partial x^k} \frac{\partial X^h}{\partial x^j} + \frac{\partial X^h}{\partial x^i} \frac{\partial^2 X^h}{\partial x^j \partial x^k}.$$

この式で i, j, k をこの順に循環させて，第 3 式にだけ負号をつければ，

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = \frac{\partial^2 X^h}{\partial x^j \partial x^i} \frac{\partial X^h}{\partial x^k} + \frac{\partial X^h}{\partial x^j} \frac{\partial^2 X^h}{\partial x^k \partial x^i},$$

$$-\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}=-\frac{\partial^2 X^h}{\partial x^k \partial x^j}\frac{\partial X^h}{\partial x^i}-\frac{\partial X^h}{\partial x^k}\frac{\partial^2 X^h}{\partial x^i \partial x^j}.$$

これら 3 式を加えれば，左辺は

(6.3) $$2\Gamma_{ijk}=\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}$$

となり，右辺は $2(\partial X^h/\partial x^j)(\partial^2 X^h/\partial x^k \partial x^i)$ となる．ゆえに

(6.4) $$\Gamma_{ijk}=\frac{\partial X^h}{\partial x^j}\frac{\partial^2 X^h}{\partial x^k \partial x^i}$$

がえられた．この量 Γ_{ijk} は斜交座標系では 0 であるから，一般の曲線座標系では重要な働きをするであろう． 3 つの添字のうち，中央の j は少し異なった役割をもつことは，(6.3)，(6.4) からわかる．i, k については，

(6.5) $$\Gamma_{ijk}=\Gamma_{kji}$$

という対称性が成り立つ．これらの Γ_{ijk} を **第1種のクリストフェルの記号** という．

Erwin Bruno Christoffel (1829～1901) は主としてドイツのストラスブルグ大学（現在はフランス領）の教授であった人で，Riemann に次いで関数論，偏微分方程式論，2 次微分式の不変式論，曲面論を研究した．1869 年に Lipschitz と同時に，ただし独立に，不変式論の論文を発表した．これは $g_{ij}(x)dx^i dx^j$ $(i,j=1,\cdots,n)$ の不変式論であり，そこに上記の Γ_{ijk} が登場した．初めにはこれは $[{}^{i}{}_{j}{}^{k}]$，または $[ik, j]$ と表わされ，(6.7) の ${\Gamma_i}^j{}_k$ は $\{{}^{j}{}_{i}{}^{k}\}$，$\{{}_{j}{}^{i}{}_{k}\}$ と表わされた．Γ は Christoffel の頭文字 $\boldsymbol{C}$ に対応するギリシャ文字である．

(4.3) の 2 次の行列式は 0 でなく， この行列の逆行列の要素は明らかに $\partial x^i/\partial X^j$ で与えられる．これから (6.1′) と同様に

(6.6) $$g^{ij}=\frac{\partial x^i}{\partial X^h}\frac{\partial x^j}{\partial X^h}$$

($\sum_h$ を省略) を作れば，行列 (g^{ij}) が行列 (g_{ij}) の逆行列であることはすぐにわかる．そこで

(6.7) $${\Gamma_i}^h{}_k=g^{hj}\Gamma_{ijk}$$

と定義される量を **第2種のクリストフェルの記号** という．これは (6.4)，(6.6) より

$$\Gamma_i{}^h{}_k=\frac{\partial x^h}{\partial X^l}\frac{\partial x^j}{\partial X^l}\cdot\frac{\partial X^m}{\partial x^j}\frac{\partial^2 X^m}{\partial x^i\partial x^k}=\frac{\partial x^h}{\partial X^m}\frac{\partial^2 X^m}{\partial x^i\partial x^k},$$

すなわち

$$\Gamma_i{}^h{}_k=\frac{\partial x^h}{\partial X^j}\frac{\partial^2 X^j}{\partial x^i\partial x^k} \tag{6.8}$$

である．

例 1.9 極座標 $(r,\ \theta)=(x^1,\ x^2)$ についてクリストフェルの記号を計算しよう．

$$X^1=x^1\cos x^2,\qquad X^2=x^1\sin x^2$$

より

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial X^1}{\partial x^1} & \dfrac{\partial X^2}{\partial x^1}\\ \dfrac{\partial X^1}{\partial x^2} & \dfrac{\partial X^2}{\partial x^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos x^2 & \sin x^2\\ -x^1\sin x^2 & x^1\cos x^2\end{pmatrix},$$

(6.1′) により

$$g_{11}=1,\qquad g_{12}=0,\qquad g_{22}=(x^1)^2.$$

ゆえに逆行列を作って

$$g^{11}=1,\qquad g^{12}=0,\qquad g^{22}=\frac{1}{(x^1)^2}.$$

(6.3) により

$$2\Gamma_{111}=\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}=0,\qquad 2\Gamma_{121}=2\frac{\partial g_{12}}{\partial x^1}-\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}=0,$$

$$2\Gamma_{112}=\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}=0,\qquad 2\Gamma_{122}=\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}=2x^1,$$

$$2\Gamma_{212}=2\frac{\partial g_{12}}{\partial x^2}-\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}=-2x^1,\qquad 2\Gamma_{222}=\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2}=0.$$

これから

$$\Gamma_1{}^1{}_1=g^{11}\Gamma_{111}=0,\qquad \Gamma_1{}^2{}_1=g^{22}\Gamma_{121}=0,$$

$$\Gamma_1{}^1{}_2=g^{11}\Gamma_{112}=0,\qquad \Gamma_1{}^2{}_2=g^{22}\Gamma_{122}=\frac{1}{x^1},$$

$$\Gamma_2{}^1{}_2=g^{11}\Gamma_{212}=-x^1,\qquad \Gamma_2{}^2{}_2=g^{22}\Gamma_{222}=0.$$

§7. 共変微分法

平面 π 上に定ベクトル野 $\boldsymbol{u}$ が与えられたとする．斜交座標系に関するその成分 $(U^1,\ U^2)$ は (2.6) により明らかに定数である．したがってベクトル野 $\boldsymbol{u}$ が定ベクトル野であるということは，

(7.1)
$$\frac{\partial U^i}{\partial X^j}=0$$

で与えられる．しかし一般の曲線座標系については，(5.4) の $\boldsymbol{e}_i$ が一定でないから，u^i が定数とはならない．このことを調べよう．

(5.5) より

(7.2)
$$\frac{\partial U^i}{\partial X^j}=\left(\frac{\partial u^k}{\partial x^h}\frac{\partial X^i}{\partial x^k}+u^k\frac{\partial^2 X^i}{\partial x^k\partial x^h}\right)\frac{\partial x^h}{\partial X^j}.$$

ゆえに (7.1) は

$$\frac{\partial u^k}{\partial x^h}\frac{\partial X^i}{\partial x^k}+u^k\frac{\partial^2 X^i}{\partial x^k\partial x^h}=0$$

と表わされるが，何かよくわからない式である．そこで (6.8) からえられる

$$\frac{\partial^2 X^i}{\partial x^k\partial x^h}=\Gamma_k{}^l{}_h\frac{\partial X^i}{\partial x^l}$$

を (7.2) へ代入して

$$\begin{aligned}\frac{\partial U^i}{\partial X^j}&=\left(\frac{\partial u^k}{\partial x^h}\frac{\partial X^i}{\partial x^k}+u^k\Gamma_k{}^l{}_h\frac{\partial X^i}{\partial x^l}\right)\frac{\partial x^h}{\partial X^j}\\&=\left(\frac{\partial u^k}{\partial x^h}+u^l\Gamma_l{}^k{}_h\right)\frac{\partial X^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^h}{\partial X^j}.\end{aligned}$$

ゆえに

(7.3)
$$u^k{}_{;h}=\frac{\partial u^k}{\partial x^h}+u^l\Gamma_l{}^k{}_h$$

とおけば，(7.2) は

(7.2′)
$$\frac{\partial U^i}{\partial X^j}=u^k{}_{;h}\frac{\partial X^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^h}{\partial X^j}$$

と表わされ，したがって (7.1) は $u^k{}_{;h}=0$ となる．

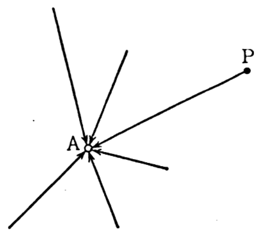
(7.3) で与えられた $u^k{}_{;h}$ を，関数 u^k の**共変微係数**という．すなわち，ふつうの偏微係数をクリストフェルの記号によって少し修正するのである．斜交座標系については，g_{ij} は定数だから $\Gamma_j{}^i{}_k=0$，ゆえにふつうの偏微係数である．一般の曲線座標系では単に $\partial u^k/\partial x^h=0$ は，$\boldsymbol{u}$ の幾何的意味を表わさない．これは $\boldsymbol{u}$ と座標系との相互関係を表わすにすぎない．

例 1.10 ベクトル野 $\boldsymbol{u}$ がすべて固定点 A へ流れこんでいる (concurrent) としよう. 正確にいえば, 各点 P で $\boldsymbol{u}=\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ ということである. A を原点とする斜交座標系に関する点 P の座標を (X^i) とすれば, $\boldsymbol{u}$ の成分は $U^i=-X^i$. ゆえに

$$\frac{\partial U^i}{\partial X^j}=-\delta^i_j.$$

これが斜交座標系に関する concurrent 性の条件である. このとき (7.2′) は

$$-\delta^i_j=u^k{}_{;h}\frac{\partial X^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^h}{\partial X^j}.$$



1-21 図

これから

$$-\delta^i_j\frac{\partial x^l}{\partial X^i}\frac{\partial X^j}{\partial x^m}=u^k{}_{;h}\frac{\partial X^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^h}{\partial X^j}\cdot\frac{\partial x^l}{\partial X^i}\frac{\partial X^j}{\partial x^m}.$$

左辺は $-\delta^l_m$ であり, 右辺は単に $u^l{}_{;m}$ である. ゆえに曲線座標に関しても, この性質は $u^i{}_{;j}=-\delta^i_j$ で与えられる.

たとえばベクトル野 $\boldsymbol{u}$ の長さ $|\boldsymbol{u}|$ を表わす数値はいかなる座標系に関しても (単位が同じなら) 同じである. 一般に, 座標系の取り方に関係しない量を**スカラー**という. すなわち

$$F(X^1,\ X^2)=f(x^1,\ x^2).$$

ベクトル野 $\boldsymbol{u}$ の成分 $(U^1,\ U^2)$, $(u^1,\ u^2)$ は, $U^i=u^i$ とならないからスカラーではない. 上式から

$$\frac{\partial F}{\partial X^i}=\frac{\partial f}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial X^i}. \tag{7.4}$$

ゆえにスカラーが定数であるということは, $\partial F/\partial X^i=0$ でもまた $\partial f/\partial x^j=0$ でも表わされ, 曲線座標についてもクリストフェルの記号で修正する必要はなく, 単に偏微係数 $\partial f/\partial x^j$ を考えればよい.

2つのベクトル野 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ の内積 $\boldsymbol{uv}$ もまたスカラーである.

$$f(x^1,\ x^2)=\boldsymbol{uv}=g_{ij}u^iv^j.$$

これから

$$\frac{\partial f}{\partial x^k}=\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}u^iv^j+g_{ij}\frac{\partial u^i}{\partial x^k}v^j+g_{ij}u^i\frac{\partial v^j}{\partial x^k}.$$

ベクトルの偏微係数を共変微係数で表わして,

$$\frac{\partial f}{\partial x^k}=\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}u^i v^j+g_{ij}(u^i{}_{;k}-u^l\Gamma_l{}^i{}_k)v^j$$

$$+g_{ij}u^i(v^j{}_{;k}-v^l\Gamma_l{}^j{}_k)$$

$$=\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}-g_{lj}\Gamma_i{}^l{}_k-g_{il}\Gamma_j{}^l{}_k\right)u^i v^j$$

$$+g_{ij}u^i{}_{;k}v^j+g_{ij}u^i v^j{}_{;k}.$$

ゆえに

$$g_{ij;k}=\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}-g_{lj}\Gamma_i{}^l{}_k-g_{il}\Gamma_j{}^l{}_k \tag{7.5}$$

とおけば,

$$\frac{\partial f}{\partial x^k}=g_{ij;k}u^i v^j+g_{ij}u^i{}_{;k}v^j+g_{ij}u^i v^j{}_{;k}.$$

この式は大変美しい. というのは, 積に対する偏微分公式

$$\frac{\partial}{\partial x^k}(pqr)=\frac{\partial p}{\partial x^k}qr+p\frac{\partial q}{\partial x^k}r+pq\frac{\partial r}{\partial x^k}$$

とまったく似ているからである. そこで (7.5) の $g_{ij;k}$ を基本量 g_{ij} の共変微係数というべきであろう. しかし実は $g_{ij;k}=0$ なのである.

$$g_{ij;k}=0. \tag{7.6}$$

これを **リッチの lemma** という. 証明は簡単である. というのは, (6.3) より

$$2(\Gamma_{ijk}+\Gamma_{jik})=2\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}.$$

ゆえに

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}-\Gamma_{ijk}-\Gamma_{jik}=0 \tag{7.6'}$$

であり, これが (7.6) そのものであることは, (6.7) からえられる $\Gamma_{ijk}=g_{jh}\Gamma_i{}^h{}_k$ から明らかである.

Gregorio Ricci-Curbastro (1853～1925) は主としてパドアに住んだイタリア人. 上記の Christoffel に次いでリーマン幾何学を発展させた功績は測り知れないものがある.

その弟子 Levi-Civita と協力して 1900 年に書かれた書物は微分幾何学及びテンソル解析学に初めて現代風の衣装を着せたものであった．1923 年に初刷が発行され，現在もその方面の最も優れた教科書である J. A. Schouten の "Der Ricci-Kalkül" は Ricci 自身に献呈されたものである．その第2刷（1954 年，英訳）には，

> This book is dedicated to the memory of Dr. Gregorio Ricci Curbastro in life Professor of Mathematics in the University of Padua, who laid the foundations of tensor calculus.

と書かれている（tensor については § 8 参照).

したがって

$$\frac{\partial f}{\partial x^k}=g_{ij}u^i{}_{;k}v^j+g_{ij}u^iv^j{}_{;k}$$

がえられるが，これは当然なのである．というのは，$\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ を定ベクトル野とすれば，内積 f も定数であり，上式は 0＝0 となる．左辺に $g_{ij;k}u^iv^j$ が残ったとすれば変ではないか.

§ 8. テンソル

(x^1, x^2) を，平面 π の領域 D で成り立つ曲線座標とする．もう1つ領域 $\overline{D}$ で成り立つ曲線座標 $(\bar{x}^1, \bar{x}^2)$ があって，$D\cap\overline{D}=U$ が空でないとする．このとき U の点 P に2つの曲線座標 (x^i), $(\bar{x}^a)$ がえられる．直交座標 (X^1, X^2) を用いて，(4.2) のように

$$x^i=f^i(X^1, X^2), \qquad \bar{x}^a=g^a(X^1, X^2)$$

とし，第1の方の逆を

$$X^i=\varphi^i(x^1, x^2)$$

とすれば

$$\bar{x}^a=g^a(\varphi^1(x^1, x^2),\ \varphi^2(x^1, x^2))$$

というように，$\bar{x}^a$ は x^i の関数であり，

$$\frac{\partial\bar{x}^a}{\partial x^i}=\frac{\partial\bar{x}^a}{\partial X^k}\frac{\partial X^k}{\partial x^i}.$$

ここに (4.3) により，行列 $(\partial X^k/\partial x^i)$ の行列式は 0 でなく，また，行列 $(\partial\bar{x}^a/\partial X^k)$ は同様の行列 $(\partial X^k/\partial\bar{x}^a)$ の逆行列である．それらの行列の積で

ある行列 $(\partial\bar{x}^a/\partial x^i)$ の行列式も 0 ではない．曲線座標 $(\bar{x}^a)$ からえられるフレーム $(\mathrm{P}\,;\,\bar{\boldsymbol{e}}_1,\,\bar{\boldsymbol{e}}_2)$ についても，(6.1) のように

$$\bar{g}_{ab}=\bar{\boldsymbol{e}}_a\bar{\boldsymbol{e}}_b$$

がえられ，

$$\bar{\boldsymbol{e}}_a=\left(\frac{\partial X^1}{\partial\bar{x}^a},\ \frac{\partial X^2}{\partial\bar{x}^a}\right)$$

であるから

$$\bar{\boldsymbol{e}}_a=\left(\frac{\partial X^1}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^a},\ \frac{\partial X^2}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^a}\right)$$

となり，

$$\bar{\boldsymbol{e}}_a=\boldsymbol{e}_i\frac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^a} \tag{8.1}$$

がえられる．したがって

$$\bar{g}_{ab}=g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^a}\frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^b} \tag{8.2}$$

がえられる．

ベクトル野 $\boldsymbol{u}$ を考えよう．(5.4) により

$$\boldsymbol{u}=u^i\boldsymbol{e}_i=\bar{u}^a\bar{\boldsymbol{e}}_a.$$

(8.1) を用いて

$$u^i=\bar{u}^a\frac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^a}.$$

これを逆に解いて

$$\bar{u}^a=u^i\frac{\partial\bar{x}^a}{\partial x^i} \tag{8.3}$$

がえられる．

(8.2), (8.3) を一般化して次の定義がえられる．各曲線座標系 (x^i) に関して，2^{r+s} 個の関数 $T_{j_1\cdots j_s}{}^{i_1\cdots i_r}$ $(i_1,\cdots,i_r,j_1,\cdots,j_s=1,2)$ が与えられ，その間に

$$\bar{T}_{b_1\cdots b_s}{}^{a_1\cdots a_r}=T_{j_1\cdots j_s}{}^{i_1\cdots i_r}\frac{\partial\bar{x}^{a_1}}{\partial x^{i_1}}\cdots\frac{\partial\bar{x}^{a_r}}{\partial x^{i_r}}\frac{\partial x^{j_1}}{\partial\bar{x}^{b_1}}\cdots\frac{\partial x^{j_s}}{\partial\bar{x}^{b_s}} \tag{8.4}$$

という関係があるとき，$T_{j_1\cdots j_s}{}^{i_1\cdots i_r}$ を **r 次反変，s 次共変であるテンソル野**の成分という（単に (r, s)-型のテンソル野ともいう）．

テンソル野でなく，ある点 P におけるテンソルもまた考えられる．このとき $T_{j_1\cdots j_s}{}^{i_1\cdots i_r}$ は 2^{r+s} 個の量で，(8.4) はその点 P で成り立つとするのである．すなわち $\partial\bar{x}^{a_1}/\partial x^{i_1}$ 等は P における値である．

この定義から，(8.2) によって g_{ij} は $(0,2)$-型テンソルの成分である．このテンソルを**基本テンソル**，または**計量テンソル**という．また (8.3) によって u^i は $(1,0)$-型のテンソルである．一般に $(1,0)$-型のテンソルを**反変ベクトル**，または単にベクトルという．実際，$(1,0)$-型テンソル u^i が与えられたとき，$u^i\boldsymbol{e}_i$ も $\bar{u}^a\bar{\boldsymbol{e}}_a$ も (8.1) によって同じものであることがわかる．というのは

$$\bar{u}^a\bar{\boldsymbol{e}}_a=u^i\frac{\partial\bar{x}^a}{\partial x^i}\cdot\boldsymbol{e}_j\frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^a}=u^i\boldsymbol{e}_j\delta_i^j=u^i\boldsymbol{e}_i.$$

よって $\boldsymbol{u}=u^i\boldsymbol{e}_i$ というベクトルがえられるわけである．

例 1.11　ベクトル u^i と g_{ij} から

$$v_i=u^jg_{ji}$$

を作る．これは $(0,1)$-型テンソルである．というのは，

$$\begin{aligned}\bar{v}_a=\bar{u}^b\bar{g}_{ba}&=u^j\frac{\partial\bar{x}^b}{\partial x^j}\cdot g_{ik}\frac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^b}\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^a}\\&=u^jg_{ik}\left(\frac{\partial\bar{x}^b}{\partial x^j}\frac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^b}\right)\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^a}=u^jg_{ik}\delta_j^i\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^a}\\&=u^ig_{ik}\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^a}=v_k\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^a}.\end{aligned}$$

一般に $(0,1)$-型テンソルを**共変ベクトル**という．

例 1.12　行列 (g_{ij}) は正則であるから，その逆行列を (g^{ij}) とする．これは $(2, 0)$-型テンソルである．というのは，

$$\begin{aligned}\left(g^{ij}\frac{\partial\bar{x}^a}{\partial x^i}\frac{\partial\bar{x}^b}{\partial x^j}\right)\bar{g}_{ac}&=\left(g^{ij}\frac{\partial\bar{x}^a}{\partial x^i}\frac{\partial\bar{x}^b}{\partial x^j}\right)\left(g_{hk}\frac{\partial x^h}{\partial\bar{x}^a}\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^c}\right)\\&=g^{ij}g_{hk}\left(\frac{\partial\bar{x}^a}{\partial x^i}\frac{\partial x^h}{\partial\bar{x}^a}\right)\frac{\partial\bar{x}^b}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^c}\\&=g^{ij}g_{hk}\delta_i^h\frac{\partial\bar{x}^b}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^c}=g^{ij}g_{ik}\frac{\partial\bar{x}^b}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^c}\\&=\delta_k^j\frac{\partial\bar{x}^b}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^c}=\frac{\partial\bar{x}^b}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^c}=\delta_c^b.\end{aligned}$$

ゆえに最初の（ ）の中は $\bar{g}^{ab}$ に等しいことがわかるからである．

例 1.11 では反変ベクトル u^i から共変ベクトル v_i がえられたが，明らかに $u^i=v_j g^{ji}$ であるから，逆の考え方もできる．

例 1.13 直交座標（X^1, X^2）に関する直線の方程式

$$a_1X^1+a_2X^2+c=0$$

において，（a_1, a_2）はこの直線に垂直なベクトル $\boldsymbol{a}$ の成分である．それでは，斜交座標（x^1, x^2）に関する直線の方程式

$$b_1x^1+b_2x^2+d=0$$

で，（b_1, b_2）は何であろうか．直交座標については，この直線上の 2 点 $\mathrm{P}_1(X_1{}^i)$, $\mathrm{P}_2(X_2{}^i)$ をとると

$$a_1X_1{}^1+a_2X_1{}^2+c=0,$$
$$a_1X_2{}^1+a_2X_2{}^2+c=0$$

より

$$a_1(X_2{}^1-X_1{}^1)+a_2(X_2{}^2-X_1{}^2)=0.$$

これは $\boldsymbol{a}\overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}=0$ だから $\boldsymbol{a}$ は $\overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}$ に垂直となる．このことは斜交座標についても

$$b_1(x_2{}^1-x_1{}^1)+b_2(x_2{}^2-x_1{}^2)=0$$

がえられるが，この式の左辺は内積ではない．内積は（2.7）式で与えられることと，上式は

$$b_i(x_2{}^i-x_1{}^i)=g_{ij}(g^{jk}b_k)(x_2{}^i-x_1{}^i)=0$$

と書けることに注意すれば，ベクトル

$$\boldsymbol{b}=g^{jk}b_k\boldsymbol{e}_j$$

が直線に垂直であることがわかる．上の 2 つの例を考え合わせれば，（b_i）は垂直な共変ベクトルであるといえる．

さて，（8.3）の両辺を $\bar{x}^b$ で微分して

$$\text{(8.5)}\qquad \frac{\partial\bar{u}^a}{\partial\bar{x}^b}=\frac{\partial u^i}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^b}\frac{\partial\bar{x}^a}{\partial x^i}+u^i\frac{\partial^2\bar{x}^a}{\partial x^i\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^b}.$$

この式の最後の項が消えれば，$\partial u^i/\partial x^j$ は（1,1）-型テンソルの成分であるといえるが．また u^i が定数（$\partial u^i/\partial x^j=0$）であっても $\partial\bar{u}^a/\partial\bar{x}^b=0$ とならず，$\bar{u}^a$ が定数であるとはいえないから，幾何的には，“u^i が定数である” ということはベクトル $\boldsymbol{u}$ の座標に無関係な幾何的性質を表わさない．したがって成分の単なる偏微係数は意味がないであろう．このようにして，§7 で（7.3）という共変微分法が登場したのである．

一般のテンソル野についてもこのような共変微分法がえられて，（r, s）-型

テンソルを共変微分したものは$(r, s+1)$-型テンソルであるということになる.（7.3）で与えられたものが（1,1）-型テンソルであることを示すのは省略するが，$\Gamma_j{}^i{}_k$ と $\bar{\Gamma}_b{}^a{}_c$ との関係式をみておくことにする．それを用いて共変微係数のテンソル性はすぐ示されよう．(6.8) により

$$\bar{\Gamma}_b{}^a{}_c = \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial X^r}\frac{\partial^2 X^r}{\partial \bar{x}^b \partial \bar{x}^c}.$$

ここに

$$\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial X^r} = \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial X^r},$$

$$\frac{\partial^2 X^r}{\partial \bar{x}^b \partial \bar{x}^c} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}^b}\left(\frac{\partial X^r}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^c}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 X^r}{\partial x^i \partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^b}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^c} + \frac{\partial X^r}{\partial x^i}\frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^b \partial \bar{x}^c}.$$

よって

$$\bar{\Gamma}_b{}^a{}_c = \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial X^r}\frac{\partial^2 X^r}{\partial x^i \partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^b}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^c}$$

$$+ \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial X^r}\frac{\partial X^r}{\partial x^i}\frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^b \partial \bar{x}^c}.$$

結局

$$(8.6)\qquad \bar{\Gamma}_b{}^a{}_c = \Gamma_j{}^k{}_i\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^k}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^b}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^c} + \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i}\frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^b \partial \bar{x}^c}.$$

これも最後の項が消えれば，$\Gamma_j{}^i{}_k$ が（1,2）-型テンソルであることを示しているのであるが.

一般の型のテンソル野の共変微分法は，g_{ij} の共変微係数（7.5）を導いたのと同様に考える．第1に，反変ベクトル野 u^i と共変ベクトル野 v_i とから

$$f = u^i v_i$$

を作ろう．これは

$$\bar{f} = \bar{u}^a \bar{v}_a = u^i \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i}\cdot v_j \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^a}$$

$$= u^i v_j \delta_i^j = u^i v_i = f$$

となり，f は §7 の意味でスカラーであり， 上のテンソルの定義によれば (0,0)-型テンソルである．一般に (0,0)-型テンソルをスカラーという．スカラーについては (7.4) と同様に

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}^a}=\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a}$$

がえられ，$(\partial f/\partial x^i)$ は (0,1)-型テンソルである．そこで上の f について

（1） $f_{;j}=\partial f/\partial x^j$,

（2） $f_{;j}=u^i{}_{;j}v_i+u^iv_{i;j}$

というように，共変微分法についても，ふつうの積に対する微分公式と同様の公式が成り立つことを要請しよう．そこで

$$\begin{aligned}f_{;j}=\frac{\partial f}{\partial x^j}&=\frac{\partial u^i}{\partial x^j}v_i+u^i\frac{\partial v_i}{\partial x^j}\\&=(u^i{}_{;j}-u^h\Gamma_h{}^i{}_j)v_i+u^i\frac{\partial v_i}{\partial x^j}\\&=u^i{}_{;j}v_i+u^i\left(\frac{\partial v_i}{\partial x^j}-v_r\Gamma_i{}^r{}_j\right).\end{aligned}$$

したがって（2）とくらべて

$$v_{i;j}=\frac{\partial v_i}{\partial x^j}-v_r\Gamma_i{}^r{}_j \tag{8.7}$$

がえられることがわかる．

(7.3) と (8.7) を一般化して，たとえば (1,2)-型テンソル野 $T_{jk}{}^i$ の共変微係数 $T_{jk}{}^i{}_{;l}$ は

$$T_{jk}{}^i{}_{;l}=\frac{\partial T_{jk}{}^i}{\partial x^l}+T_{jk}{}^h\Gamma_h{}^i{}_l-T_{hk}{}^i\Gamma_j{}^h{}_l-T_{jh}{}^i\Gamma_k{}^h{}_l \tag{8.8}$$

と定義すべきであることがわかる（式 (7.5) 参照)．一般に，このような定義によってえられた共変微係数がテンソルの成分であること，そうして積の微分公式が成り立つことを示すのは省略したい．

一般にテンソル代数学とテンソル解析学をもっと整然と，もっと完全に述べるべきであろうが，これらのことはその方面の専門書に譲ることにしよう．

§9. 直線の方程式

曲線座標系 (x^1, x^2) に関して，直線はどのような方程式で表わされるだろうか．一般に弧長 s が定義される曲線 C について，C はパラメーター s を用いて

$$x^i = x^i(s), \qquad i = 1, 2$$

と表わされる．直交座標系 (X^1, X^2) によってもまた

$$X^a = X^a(s), \qquad a = 1, 2$$

と表わされる．dX^a/ds は C の単位接ベクトルである．これは

$$\frac{dX^a}{ds} = \frac{\partial X^a}{\partial x^i}\frac{dx^i}{ds} \tag{9.1}$$

とも書け，(5.5) により，dx^i/ds は，この単位接ベクトルの曲線座標系 (x^i) に関する成分であることがわかる．

ところで平面曲線論において基本的な**フレネー・セレーの公式**

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{x}}{ds} &= \boldsymbol{a}, \\ \frac{d\boldsymbol{a}}{ds} &= K\boldsymbol{b}, \\ \frac{d\boldsymbol{b}}{ds} &= -K\boldsymbol{a} \end{aligned}\right. \tag{9.2}$$

がある．ここに $\boldsymbol{a}$ は第 1 式により単位接ベクトルであり，$\boldsymbol{b}$ は単位法ベクトル（$\boldsymbol{a}$ に垂直）で，K は曲線の曲率である．(9.1) を s で微分したものが (9.2) の第 2 式で，

$$\frac{d^2X^a}{ds^2} = \frac{\partial^2 X^a}{\partial x^i \partial x^j}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} + \frac{\partial X^a}{\partial x^i}\frac{d^2x^i}{ds^2}.$$

ここで (7.2) を変形して (7.2′) がえられたのと同じ方法により

$$\frac{d^2X^a}{ds^2} = \left(\frac{d^2x^k}{ds^2} + \Gamma_i{}^k{}_j\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}\right)\frac{\partial X^a}{\partial x^k}. \tag{9.3}$$

これをよくみるために，一般に C にそって与えられたベクトル野 $\boldsymbol{u} = (u^i)$ について

(9.4)
$$\frac{\delta u^i}{\delta s}=u^i{}_{;j}\frac{dx^j}{ds}=\frac{du^i}{ds}+u^h\Gamma_h{}^i{}_j\frac{dx^j}{ds}$$

という記号を用いる．これを C にそっての $\boldsymbol{u}$ の共変微係数という．これによって (9.3) は

(9.3′)
$$\frac{d^2X^a}{ds^2}=\frac{\delta}{\delta s}\left(\frac{dx^k}{ds}\right)\cdot\frac{\partial X^a}{\partial x^k}$$

と表わされる．これを (5.5) とくらべれば，ベクトル $d\boldsymbol{a}/ds=K\boldsymbol{b}$ の曲線座標系 (x^i) に関する成分が，(9.3′) の右辺の

$$\frac{\delta}{\delta s}\left(\frac{dx^k}{ds}\right)$$

であることがわかる．これが 0 ということが直線であることにほかならないから，(9.3) により

(9.5)
$$\frac{d^2x^k}{ds^2}+\Gamma_i{}^k{}_j\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}=0$$

が求める曲線座標系による直線の方程式である．

例 1.14 極座標 $(r,\ \theta)$ で直線の方程式を書いてみよう．§6 の例 1.9 においてすでに $\Gamma_j{}^i{}_k$ は求めた．

$$\Gamma_1{}^2{}_2=\Gamma_2{}^2{}_1=\frac{1}{r},\qquad \Gamma_2{}^1{}_2=-r.$$

これ以外の $\Gamma_j{}^i{}_k$ は 0 であった．ゆえに

$$\frac{\delta}{\delta s}\left(\frac{dr}{ds}\right)=\frac{d^2r}{ds^2}-r\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2=0,$$
$$\frac{\delta}{\delta s}\left(\frac{d\theta}{ds}\right)=\frac{d^2\theta}{ds^2}+\frac{2}{r}\frac{dr}{ds}\frac{d\theta}{ds}=0.$$

この連立 1 階常微分方程式の解が直線の方程式である．これを積分すれば直線の極方程式といわれる

$$r\cos(\theta-\alpha)=h,\qquad (\alpha,\ h\ \text{は定数})$$

がえられるが，大変ややこしい．積分するには，$X=r\cos\theta$，$Y=r\sin\theta$ を用いて

$$\frac{d^2X}{ds^2}=0,\qquad \frac{d^2Y}{ds^2}=0$$

と変形するのが名案であるが，幾何的には当り前のことである．

直線の微分方程式 (9.5) は，まったく別の手段（変分学）を用いて求める方が面白いが，それは § 20 で示そう．

要するに斜交座標系では0にすぎないクリストフェルの記号 $\Gamma_j{}^i{}_k$ が，曲線座標系を用いる理論では盛んに活躍するのがわかる．しかし，これはあくまでも座標を曲がったものにとったから重要なので，平面上の幾何学研究においては重要ではない．最も簡単な直交座標系を用いて調べても万事話がすむはずである．ところが曲面上の幾何学においてはまったく事情が異なる．曲面上には一般に直線がなく，したがって斜交座標系でさえとることができない．それではどうするのか．これを第 2 章で示そう．

2 曲面の計量と曲率

万有学者として有名な Leibniz の 1684～1692 年頃の論文によって曲面の幾何学が誕生したといわれる. 古代から簡単な形の曲面, たとえば球面, 錐面などの研究はなされてきたが, 一般に曲がったものの研究には微分学が必要であった. Leibniz 以後, 曲面の研究は盛んに行なわれたが, 組織的な研究はフランスにおいて, Monge (1746～1818) とその弟子たちによって始められたということができる. 数々の重要な結果がえられたが, 数学の王者 Gauss (1777～1855) は曲面の研究においても新生面を創始した. 1827 年頃に研究成果がまとめられたが, そこには, それ以後の研究に最大な影響を与えた曲面自体の性質 (intrinsic properties) という概念が示された (§ 16). 後に Poincaré (1854～1912) は, これを, 曲面に乗せられた蟻 (2次元しか理解できない生物) にもわかる性質と表現した. この概念がリーマン幾何学を招いたのである. 1900 年以前の曲面研究の歴史は, D. J. Struik の2つの論文 "Outline of a history of differential geometry (Isis 19 (1933), 92～120; 20 (1934), 161～191)" に詳しく, また興味深く述べられている.

§ 10. 曲面の接平面と法線

ふつうの空間 (3次元ユークリッド空間) に1つの直交座標系を固定して考え, それに関する点の座標を (X^1, X^2, X^3) としておく. この章で考える曲面は次のようなものである. その各領域が方程式

$$X^\alpha = f^\alpha(x^1, x^2), \qquad \alpha = 1, 2, 3 \tag{10.1}$$

で表わされる. ここに f^α は2変数 $x^i (i=1, 2)$ の偏微分可能な関数で, 偏微分可能の階数は適当に必要なところまでとしておく. この微分可能性以外に, ヤコビアン行列

$$J(x^1, x^2) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial X^1}{\partial x^1} & \dfrac{\partial X^2}{\partial x^1} & \dfrac{\partial X^3}{\partial x^1} \\[2ex] \dfrac{\partial X^1}{\partial x^2} & \dfrac{\partial X^2}{\partial x^2} & \dfrac{\partial X^3}{\partial x^2} \end{pmatrix} \tag{10.2}$$

の rank は各点で 2 であるとする．このことは，$J(x^1, x^2)$ の 3 つの 2 次小行列式のどれかが 0 でないということで，平面上の曲線座標に対する条件（§ 4）とよく似ている．“曲面の各領域が”という意味は，(10.1) のような関数で表わされるいくつかの領域によって曲面がすっかりおおわれているということである．

例 2.1 微積分学では，2 変数 x, y の関数 $z=f(x, y)$ の研究をするのに，この (x, y, z) を空間の直交座標とし，関数のグラフである曲面を利用する．これは

$$X^1=x^1, \qquad X^2=x^2, \qquad X^3=f(x^1, x^2)$$

という特殊な形で与えられる．この場合，(10.2) のヤコビアン行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & f_1 \\ 0 & 1 & f_2 \end{pmatrix}, \qquad f_i=\frac{\partial f}{\partial x^i}$$

であり，明らかに rank 2 である．したがって，f の定義されて，しかも偏微分可能な範囲で，この曲面はただ 1 つの方程式で表わされている．

例 2.2 原点を中心とし，半径 1 の球面の方程式

$$(X^1)^2+(X^2)^2+(X^3)^2=1$$

について，上半分 ($X^3 \geqq 0$) は

$$X^3=\sqrt{1-(X^1)^2-(X^2)^2}$$

で表わされるが，$X^3=0$ では微分不可能である．よって，上式と

$$X^3=-\sqrt{1-(X^1)^2-(X^2)^2}$$

とを併せ考えれば，$X^3=0$ である大円を除いて，この球面が (10.1) のように表わされている．

さて，(10.2) のヤコビアン行列の rank が 2 であるという仮定の意味を考えよう（§ 4 と同様であることがわかる）．そのために (10.1) の表わす曲面 S 上に曲線を考えよう．(10.1) で x^1, x^2 は独立に変化するパラメーターである（したがって曲面は 2 次元であるといわれる）．しかし x^1, x^2 の間にある関係をつけて，ただ 1 つだけが独立に動くとする．これを

$$X^\alpha=f^\alpha(x^1(t), x^2(t)). \tag{10.3}$$

t が独立変数で，x^1, x^2 は t の関数であるとする．t が動けば，(10.3) は空間で 1 つの曲線 C をえがくが，(10.3) から (10.1) は成り立つから，C は S 上にある．(10.3) を t で微分すれば，

(10.4)
$$\frac{dX^\alpha}{dt}=\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt}$$

がえられ，これは C の接ベクトルの成分である．

特に S 上の曲線として，$x^1=t,\ x^2=b$ ととれば

(10.5)
$$X^\alpha=f^\alpha(x^1,\ b)$$

という，x^2 を定数 b に固定してえられる曲線 C_1 を考えよう．これを**第1媒介曲線**ということにしよう．C_1 の接ベクトル $\boldsymbol{e}_1$ の成分は，(10.4) により

$$\frac{dX^\alpha}{dt}=\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^1}$$

で，これはヤコビアン行列 (10.2) の第 1 行である．同様に x^1 を定数 a に固定して，**第2媒介曲線**

(10.6)
$$X^\alpha=f^\alpha(a,\ x^2)$$

がえられ，これを C_2 と表わそう．C_2 の接ベクトル $\boldsymbol{e}_2$ がヤコビアン行列 (10.2) の第 2 行である．したがってヤコビアン行列が rank 2 であるとは，C_1, C_2 の接ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ が 1 次独立であるという幾何的意味を表わす．

したがって §5 の 1-19 図は平面上に網が張られている図であったが，この図が曲面上にえがかれたものとみれば，曲面 S が 2 系の媒介曲線族 $\{C_1\}$，$\{C_2\}$ で作られた網で張られていることを示すものである．ゆえにパラメーターの組 $(x^1,\ x^2)$ を曲面 S 上の点の**座標**ということにしよう．座標が $(a,\ b)$ という点で $C_1(x^2=b)$ と $C_2(x^1=a)$ とが交わっていることになる．

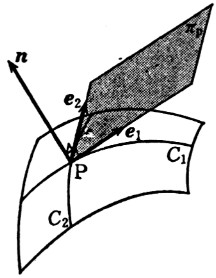
一般の (10.4) については，この曲線 C 上の点 P における C の接ベクトル $\boldsymbol{e}=(dX^\alpha/dt)$ が

(10.4′)
$$\boldsymbol{e}=\frac{dx^1}{dt}\boldsymbol{e}_1+\frac{dx^2}{dt}\boldsymbol{e}_2$$

と書けることを示している．すなわち，C の接ベクトルは，C_1, C_2 の接ベクトルによって張られる平面 π_{P} の上にある．この平面 π_{P} を点 P における S の**接平面**という (2-1 図)．したがって点 P における S の接平面とは，P を通って S 上にえがかれたすべての曲線の P における接ベクトルの全体から

できる平面である.

S 上の点 P を通り接平面 π_P に垂直な単位ベクトルを単に**法ベクトル**という. これを今後 $\boldsymbol{n}$ と表わそう. これは C_1, C_2 の接ベクトル $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ の外積 $\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2$ に平行である. 一般に 2 つのベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ の外積については



2-1 図

(10.7) $$\boldsymbol{u}^2\boldsymbol{v}^2 - (\boldsymbol{u}\boldsymbol{v})^2 = (\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v})^2$$

が成り立つから, $\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2$ の長さは

(10.8) $$|\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2| = \sqrt{\boldsymbol{e}_1{}^2\boldsymbol{e}_2{}^2 - (\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2)^2}$$

である. ゆえに, 向きを無視すれば,

(10.9) $$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2}{\sqrt{\boldsymbol{e}_1{}^2\boldsymbol{e}_2{}^2 - (\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2)^2}}.$$

例 2.3 半径 a の球面を方程式

$$X^1 = a \sin x^1 \cos x^2, \qquad X^2 = a \sin x^1 \sin x^2, \qquad X^3 = a \cos x^1$$

によっても表わすことができる. (r, x^1, x^2) は空間の極座標で, この球面については $r = a$ である. これについて

$$\boldsymbol{e}_1 = (a \cos x^1 \cos x^2, \quad a \cos x^1 \sin x^2, \quad -a \sin x^1),$$
$$\boldsymbol{e}_2 = (-a \sin x^1 \sin x^2, \quad a \sin x^1 \cos x^2, \quad 0),$$
$$\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 = (a^2 \sin^2 x^1 \cos x^2, \ a^2 \sin^2 x^1 \sin x^2, \ a^2 \sin x^1 \cos x^1),$$
$$|\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2| = a^2 \sin x^1,$$
$$\boldsymbol{n} = (\sin x^1 \cos x^2, \quad \sin x^1 \sin x^2, \quad \cos x^1).$$

ゆえに $\boldsymbol{n} = \dfrac{1}{a}(X^1, X^2, X^3)$ となり, この結果は幾何的には明らかである.

§ 11. 誘導計量

曲面 S 上にえがかれた曲線 C の方程式を (10.3) とする. C の弧長は積分

$$\int \sqrt{\left(\frac{dX^1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dX^2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dX^3}{dt}\right)^2} dt$$

によって計算されるから, 弧長 s の微分 ds は

$$ds^2 = \sum_\alpha \left(\frac{dX^\alpha}{dt}\right)^2 dt^2.$$

これは (10.4) により

$$ds^2 = \sum_\alpha \left(\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} dt \right)^2$$

$$= \sum_\alpha \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^j} dx^i dx^j.$$

ゆえに

(11.1) $$g_{ij}(x^1,\ x^2) = \sum_\alpha \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^j}.$$

したがって媒介曲線 C_1, C_2 の接ベクトル $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ の内積

(11.1′) $$g_{ij}(x^1,\ x^2) = \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j$$

をとれば

(11.2) $$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$$

がえられ，S 上の曲線の長さはこの微分 2 次型式の平方根を積分してえられる．

以上において，C は曲面 S 上にあるとしたが，C の長さは空間のユークリッド計量で測られたわけである．

(11.2) において $g_{ij}(x)$ は S 上の関数であり，したがって C の長さは S 上の量を積分してえられる．(11.2) で与えられる S 上の計量を，S 上の**誘導計量**という．そとの空間のものから誘導されたものという意味である．(11.2) を S の**計量型式**，または**基本型式**という．(11.1) と (6.1′)，また (11.1′) と (6.1) の類似性に注意せよ．

(11.1′) から，$\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ の長さとなす角 θ は

$$|\boldsymbol{e}_1| = \sqrt{g_{11}}, \qquad |\boldsymbol{e}_2| = \sqrt{g_{22}},$$

$$\sqrt{g_{11} g_{22}} \cos\theta = g_{12}$$

で与えられることがわかるが，さらに (10.8) により

$$|\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2| = \sqrt{g_{11} g_{22} - (g_{12})^2}.$$

ゆえに 2 次の対称行列式 $|g_{ij}|$ の値を g とすれば，(10.9) より

(11.3) $$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2}{\sqrt{g}}.$$

この行列式について次のことに注意すべきである．

(11.4) $$g_{11}>0,\quad g_{22}>0,\quad g>0.$$

上記のことからこれらは明らかである．そこで (11.2) 式を次のように変形しよう．

$$ds^2=g_{11}(dx^1)^2+2g_{12}dx^1dx^2+g_{22}(dx^2)^2$$
$$=g_{11}\left(dx^1+\frac{g_{12}}{g_{11}}dx^2\right)^2+\left(g_{22}-\frac{{g_{12}}^2}{g_{11}}\right)(dx^2)^2.$$

これは g を用いて

(11.5) $$ds^2=g_{11}\left(dx^1+\frac{g_{12}}{g_{11}}dx^2\right)^2+\frac{g}{g_{11}}(dx^2)^2.$$

したがって (11.4) により

$$ds=0 \iff dx^1=dx^2=0$$

で，(11.5) の右辺は，$dx^1=dx^2=0$ でなければ正値である．ゆえに基本形式 ds^2 はいわゆる正定値 2 次型式である．これは ds^2 の幾何的意味から明らかであるが，第 3 章以下では注意すべき事実となる．

さて，計量が考えられたので，角も考えられる．曲面 S 上の点 P における接平面 π_P 上のベクトル $\boldsymbol{u}$ を，P において S に接するベクトル，または単に S 上の**ベクトル**という．それは C_1, C_2 の接ベクトル $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ の 1 次結合

(11.6) $$\boldsymbol{u}=u^i\boldsymbol{e}_i$$

として表わされる．もう 1 つ P における S 上のベクトル $\boldsymbol{v}=v^i\boldsymbol{e}_i$ があれば，(11.1′) により，内積は

(11.7) $$\boldsymbol{uv}=g_{ij}u^iv^j$$

で与えられる．したがって $\boldsymbol{u}$ の長さは

(11.8) $$|\boldsymbol{u}|=\sqrt{g_{ij}u^iu^j}.$$

また $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ のなす角 θ は

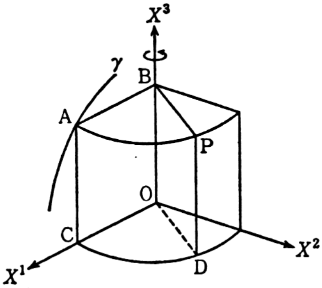
(11.9) $$\cos\theta=\frac{g_{ij}u^iv^j}{\sqrt{g_{ij}u^iu^j}\sqrt{g_{ij}v^iv^j}}$$

で与えられる．

例 2.4 回 転 面: 2-2 図は X^1X^3 平面上の曲線 γ が X^3 軸の回りに回転してできる回転面上の任意の点 P を示している．P は γ 上の点 A が回転してきたものと

する． $P(X^1, X^2, X^3)$, $A(x, 0, z)$ とすれば，(x, z) は γ を表わす方程式 $f(x, z)=0$ をみたす．P の座標については

$$\sqrt{(X^1)^2+(X^2)^2}=OD=OC=x,$$
$$X^3=OB=z.$$



2-2 図

ゆえに

(11.10)　$f(\sqrt{(X^1)^2+(X^2)^2},\ X^3)=0.$

たとえば，双曲線

$$\gamma:\qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$$

が副軸の回りに回転してできる回転面は

$$\frac{(X^1)^2}{a^2}+\frac{(X^2)^2}{a^2}-\frac{(X^3)^2}{b^2}=1$$

という，1葉双曲面である．

しかし曲面の一般論にそうには，(11.10) よりも，2 つのパラメーターを考える方がよい．γ の方程式を

$$x=\varphi(t),\qquad z=\psi(t)$$

とパラメーター t で表わそう．A からPへの回転角を θ とすれば，明らかにこの回転面の方程式は

(11.11)　$X^1=\varphi(t)\cos\theta,\qquad X^2=\varphi(t)\sin\theta,\qquad X^3=\psi(t).$

この (t, θ) を (x^1, x^2) と考えれば，(10.1) 型の方程式がえられた．これについて

$$e_1=(\varphi'\cos\theta,\qquad \varphi'\sin\theta,\qquad \psi'),$$
$$e_2=(-\varphi\sin\theta,\qquad \varphi\cos\theta,\qquad 0),$$
$$g_{11}=(\varphi')^2+(\psi')^2,\qquad g_{12}=0,\qquad g_{22}=\varphi^2,$$
$$ds^2=\{(\varphi')^2+(\psi')^2\}dt^2+\varphi^2d\theta^2.$$

誘導計量は与えられた曲面に対して一意に定まるのであるが，誘導的でない計量も考えられ，その方がときには重要である．たとえば曲面 S として特に平面 π を考え，π に信州松本市近辺の 10 万分の 1 の地図がえがかれているとしよう．A 地点，B 地点の地図がそれぞれ π 上の点 P, Q であれば，P, Q の距離，または P から Q へ行く道の長さは，現実の A 地点と B 地点との距離，または道の長さで述べられるべきであろう．こうして地図であるとみられた平面 π 上の計量は誘導計量では決してない．そのような例をあげよう．

例 2.5　メルカトールの地図: 例 2.3 の球面について，$\dfrac{\pi}{2}-x^1=\varphi,\quad x^2=\theta$ とすれば，方程式は

$$X^1 = a\cos\varphi\cos\theta, \qquad X^2 = a\cos\varphi\sin\theta, \qquad X^3 = a\sin\varphi.$$

これは地球面を半径 a の球面とみなしたとき，φ は北緯，θ は東経の角を示す．点 $(0, 0, a)$ は北極である．$(\theta, \varphi) = (x^1, x^2)$ として

$$e_1 = (-a\cos\varphi\sin\theta, \quad a\cos\varphi\cos\theta, \quad 0),$$
$$e_2 = (-a\sin\varphi\cos\theta, \quad -a\sin\varphi\sin\theta, \quad a\cos\varphi),$$
$$g_{11} = a^2\cos^2\varphi, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = a^2.$$

よって

$$ds^2 = a^2\cos^2\varphi d\theta^2 + a^2 d\varphi^2.$$

これはこの球面の誘導計量である．ここで

$$\alpha = \theta + i\log\tan\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

という変数 α をとれば，

$$d\alpha = d\theta + \frac{i}{\cos\varphi}d\varphi.$$

よって，$d\alpha$ の共役複素数を $d\bar{\alpha}$ と表わせば，

$$d\alpha d\bar{\alpha} = d\theta^2 + \frac{d\varphi^2}{\cos^2\varphi}.$$

ゆえに

$$ds^2 = a^2\cos^2\varphi d\alpha d\bar{\alpha}.$$

したがって

$$\psi = \log\ \tan\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

とおけば，

$$ds^2 = a^2\cos^2\varphi\,(d\theta^2 + d\psi^2).$$

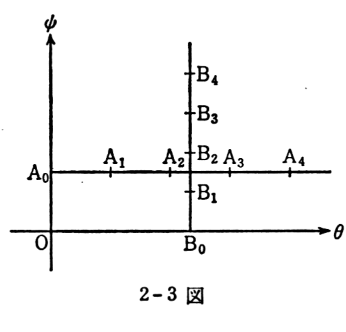
これは変数をとりかえただけで，もとの誘導計量と同じものである（(21.5) を参照せよ)．さてここで，この計量を平面 π 上の直交座標 (θ, ψ) を用いて平面 π にもちこみ，こうして π 上にえがかれた地球面の地図をメルカトールの地図という．したがってメルカトールの地図がえがかれた平面 π に，上の ds^2 という計量がはいったわけで，これは π の誘導計量ではない．

2-3 図の点 $A_0, A_1, A_2, \cdots$ を考えよう．これは

$$A_0A_1 = A_1A_2 = \cdots,$$

この等号は π のふつうの計量（誘導計量）についてである．すなわち，A_i の θ を θ_i とすれば，

$$\theta_1 - \theta_0 = \theta_2 - \theta_1 = \theta_3 - \theta_2 = \cdots.$$



2-3 図

これら A_i は等しい ψ をもつから，A_iA_{i+1} の ds は

$$ds^2 = a^2\cos^2\varphi\, d\theta^2$$

で計算され，φ も各 A_i について同じである．よって，この ds で測っても $A_0A_1 = A_1A_2 = \cdots$ である．他方，

$$B_0B_1 = B_1B_2 = \cdots$$

という B_i については事情が異なり，B_iB_{i+1} の ds は

$$ds^2 = a^2\cos^2\varphi d\psi^2$$

で計算され，ψ（したがって φ）が大きく $\left(\text{ただし } 0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ なれば，$\cos\varphi$ は小さくなるから ds も小さくなる．ゆえにメルカトールの地図の計量では

$$B_0B_1 > B_1B_2 > B_2B_3 > \cdots$$

となっている．赤道近くの緯度が 10° 離れた 2 地点よりも，北極近くの同様の 2 地点の方がずっと離れている地図ができる．

Geraad Mercator（1512～1594）はフランドルの地図学者で数学者． A. Ortelius と共に科学的基礎づけによって近代地図学を開拓した人．

§ 12. 第 2 基本量

(11. 1′) は平面上の曲線座標系に関する (6. 1) と同じである．ただし成分で表わせば (11. 1) の $\sum_\alpha$ は $\alpha = 1, 2, 3$ であるが，(6. 1′) においては $h = 1, 2$ であり，空間ベクトルと平面ベクトルとの相異があるだけである．(6. 1) からクリストフェルの記号を (6. 4) で定義したことと比較すれば，曲面においても (11. 1) の g_{ij} からそれに相当する量を作るべきであろう．それは (6. 4) と同様に

$$\Gamma_{ijk} = \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^j}\frac{\partial^2 X^\alpha}{\partial x^i \partial x^k} = e_j \frac{\partial e_i}{\partial x^k} \tag{12.1}$$

で定義される（上式で $\sum_\alpha$ は省略されている）．行列 (g_{ij}) の逆行列 (g^{ij}) を考えて，(6. 7) と同様に

$$\Gamma_i{}^h{}_k = g^{hj}\Gamma_{ijk} \tag{12.2}$$

を作れば，内積をとって

$$\left(\frac{\partial e_i}{\partial x^j} - \Gamma_i{}^k{}_j e_k\right) e_h = \Gamma_{ihj} - \Gamma_i{}^k{}_j g_{kh} = 0$$

となり，(　) の中のベクトルは接平面に垂直であることがわかり，法ベクト

ル $\boldsymbol{n}$ を用いて $b_{ij}\boldsymbol{n}$ という形に書ける．こうして

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial x^j}=\Gamma_i{}^k{}_j\boldsymbol{e}_k+b_{ij}\boldsymbol{n} \tag{12.3}$$

という重要な公式がえられる．これを**ガウスの方程式**といい，係数 b_{ij} を曲面の**第 2 基本量**という．これに対して g_{ij} を特に**第1基本量**ともいう．

上式は接ベクトルの偏微係数であるベクトル $\partial\boldsymbol{e}_i/\partial x^j$ を曲面に接する成分と垂直な成分とに分解したものであるが，垂直性 $\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{n}=0$ より

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial x^j}\boldsymbol{n}+\boldsymbol{e}_i\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial x^j}=0$$

がえられるから，第2基本量 b_{ij} は

$$b_{ij}=\frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial x^j}\boldsymbol{n}=-\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial x^j}\boldsymbol{e}_i \tag{12.4}$$

で与えられる．第 2 基本量の対称性 $b_{ij}=b_{ji}$ は明らかであろう．というのは $\partial\boldsymbol{e}_i/\partial x^j$ の成分が（12.1）におけるように $\partial^2X^a/\partial x^i\partial x^j$ であるから．

接ベクトルの変化は（12.3）で与えられたが，法ベクトル $\boldsymbol{n}$ の変化はどうであろうか．$\boldsymbol{n}^2=1$ より

$$\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial x^j}\boldsymbol{n}=0,$$

ゆえに $\partial\boldsymbol{n}/\partial x^j$ は曲面に接し

$$\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial x^j}=\Gamma_j{}^k\boldsymbol{e}_k$$

という形に書けよう．（12.4）へ代入して

$$b_{ij}=-\Gamma_j{}^kg_{ki}.$$

これから $\Gamma_j{}^k=-b_{ij}g^{ik}$ がえられる．こうして

$$\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial x^j}=-b_j{}^i\boldsymbol{e}_i,\qquad (b_j{}^i=g^{ik}b_{kj}) \tag{12.5}$$

という重要な公式がえられる．これを**ワインガルテンの方程式**という．

Julius Weingarten (1836～1910) はベルリンのシャーロッテンブルグ理工科大学の教授で，初期にいわゆる W 曲面といわれる，2つの主曲率がある関係をみたす曲面を研究した．与えられた回転面に等長的（同じ誘導計量をもつこと）な曲面のすべてを求

める問題が W 曲面の理論に帰着されるのである．また曲面の無限小変換論についても多くの功績がある．

例 2.6 回転面の第2基本量を求めよう．例 2.4 により，(11.11) を用いて

$$g=\{(\varphi')^2+(\psi')^2\}\varphi^2,$$
$$e_1\wedge e_2=(-\varphi\psi'\cos\theta,\quad -\varphi\psi'\sin\theta,\quad \varphi\varphi').$$

ゆえに (11.3) により

$$n=\frac{1}{\sqrt{(\varphi')^2+(\psi')^2}}(-\psi'\cos\theta,\quad -\psi'\sin\theta,\quad \varphi').$$

また，

$$\frac{\partial e_1}{\partial x^1}=(\varphi''\cos\theta,\quad \varphi''\sin\theta,\quad \psi''),$$
$$\frac{\partial e_1}{\partial x^2}=(-\varphi'\sin\theta,\quad \varphi'\cos\theta,\quad 0),$$
$$\frac{\partial e_2}{\partial x^2}=(-\varphi\cos\theta,\quad -\varphi\sin\theta,\quad 0).$$

ゆえに (12.4) により

$$b_{11}=(\varphi'\psi''-\varphi''\psi')\rho,\qquad b_{12}=0,\qquad b_{22}=\varphi\psi'\rho,$$
$$\rho=\frac{1}{\sqrt{(\varphi')^2+(\psi')^2}}.$$

特に半径 a の直円柱の場合には，$\varphi=a$, $\psi(t)=t$ として $b_{11}=b_{12}=0$, $b_{22}=a$ となる．このとき ds^2 は

$$ds^2=(dx^1)^2+a^2(dx^2)^2$$

であるから，$ax^2(=a\theta)$ をあらためて x^2 とすれば，ds^2 は平面の直交座標 $(x^1,\ x^2)$ に関する ds^2 と同じことになる．したがって平面と直円柱とは同じ誘導計量をもち，等長的 (§ 18 参照) であるといえる．第 1 基本量だけによっては，平面と直円柱の見分けがつかないわけである．しかし第 2 基本量は異なる．平面の n は定ベクトルであるから，(12.4) により平面では $b_{ij}=0$ $(i,\ j=1,\ 2)$ である．

第2基本量の重要性はしだいにわかるが，ここでその1つの幾何的意味を述べよう．考えている曲面 S (10.1) を少しだけずらして，新しい曲面 $\bar{S}$ を考え，その方程式を

$$\bar{X}^\alpha=f^\alpha(x^1,\ x^2)+\varepsilon n^\alpha(x^1,\ x^2)$$

とする．ここに n^α は法ベクトル n の成分である．S の各点を法線方向に ε だけずらすのであるが，“少しだけ” という意味は “ε は定数で，以下の計算で $\varepsilon^2=0$ とする” ということであるとしよう．

$\bar{S}$ の量にすべて バー をつけて

$$\bar{e}_i = e_i + \varepsilon \frac{\partial n}{\partial x^i}$$

$$= e_i - \varepsilon b_i{}^h e_h,$$

$$\bar{g}_{ij} = (e_i - \varepsilon b_i{}^h e_h)(e_j - \varepsilon b_j{}^k e_k)$$

$$= g_{ij} - \varepsilon(b_j{}^k g_{ik} + b_i{}^h g_{hj})$$

$$= g_{ij} - 2\varepsilon b_{ij},$$

$$d\bar{s}^2 = \bar{g}_{ij} dx^i dx^j = ds^2 - 2\varepsilon b_{ij} dx^i dx^j.$$

ここにえられた微分2次型式

(12.6) $$d\tau^2 = b_{ij} dx^i dx^j$$

を，(11.2) の ds^2 に対して， S の**第2基本式**という．これに対して ds^2 を特に**第1基本式**ともいう．

§ 13. 曲面上のテンソル

例 2.6 で，直円柱について

$$g_{11} = 1, \qquad g_{12} = 0, \qquad g_{22} = a^2$$

であったが，ax^2 をあらためて x^2 とすれば，

$$g_{11} = 1, \qquad g_{12} = 0, \qquad g_{22} = 1$$

となった．このように，曲面 S 上の座標 (x^1, x^2) をとりかえれば g_{ij} が変わる．b_{ij} についても同じ事情であろう．それでは g_{ij} や b_{ij} は曲面 S そのものの性質を表わさず， S と座標との関係を示すものにすぎないのであろうか．これを調べるためには，平面上の曲線座標系の場合の (8.2) や (8.5) のように，曲面についてえられた種々の量の，座標をとりかえたときの変換式を求めておかなければならないことになる．

平面上の曲線座標の場合のように，曲面 S 上の1つの座標 (x^1, x^2) から，ヤコビアン行列式が0でない変換

$$\bar{x}^a = \varphi^a(x^1, x^2), \qquad a = 1, 2$$

でえられる $(\bar{x}^1, \bar{x}^2)$ はまた S 上の座標と考えられる．この新座標を用いてえ

られる量にはすべてバーをつけよう.

$$\frac{\partial X^\alpha}{\partial \bar{x}^a}=\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a}.$$

これから

$$\bar{\boldsymbol{e}}_a=\boldsymbol{e}_i\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a}. \tag{13.1}$$

または逆に

$$\boldsymbol{e}_i=\bar{\boldsymbol{e}}_a\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i} \tag{13.1'}$$

がえられる.

次に (11.6) を考えよう.

$$\boldsymbol{u}=\bar{u}^a\bar{\boldsymbol{e}}_a=\bar{u}^a\boldsymbol{e}_i\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a},$$

ゆえに

$$u^i=\bar{u}^a\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a}. \tag{13.2}$$

これは形式的には (8.3)（その逆変換）と一致する.

次に

$$\bar{g}_{ab}=\bar{\boldsymbol{e}}_a\bar{\boldsymbol{e}}_b=\boldsymbol{e}_i\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a}\boldsymbol{e}_j\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^b},$$

ゆえに

$$\bar{g}_{ab}=g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^b}. \tag{13.3}$$

これも形式的には (8.2) と一致する.

このように, 平面上のテンソルの定義式 (8.4) をそのまま曲面で考えて, **曲面上のテンソル**の定義がえられ, (13.2) により, 接ベクトルの成分は反変ベクトルを与え, 第1基本量は (0,2)-テンソルを与える.

第2基本量 b_{ij} を考えよう. 法ベクトル $\boldsymbol{n}$ は曲面にどのような座標をいれるかに無関係であるから,

$$\bar{b}_{ab}=\frac{\partial\bar{e}_a}{\partial\bar{x}^b}n=\frac{\partial}{\partial\bar{x}^b}\left(e_i\frac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^a}\right)n$$

$$=\frac{\partial e_i}{\partial x^j}n\frac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^a}\frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^b}+e_i n\frac{\partial^2 x^i}{\partial\bar{x}^a\partial\bar{x}^b}.$$

ここに最後の項は消えるので

$$\bar{b}_{ab}=b_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^a}\frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^b}$$

がえられ，第 2 基本量も (0,2)-テンソルを与えることがわかった．

ガウスの方程式 (12.3) を考えよう．

$$\frac{\partial\bar{e}_a}{\partial\bar{x}^b}=\bar{\Gamma}_a{}^c{}_b\bar{e}_c+\bar{b}_{ab}n.$$

これは，

$$\frac{\partial}{\partial\bar{x}^b}\left(e_i\frac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^a}\right)=\bar{\Gamma}_a{}^c{}_b e_k\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^c}+b_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^a}\frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^b}n.$$

ここに左辺は $\bar{b}_{ab}$ を求めるときにすでに計算した．すなわち，左辺は

$$=\frac{\partial e_i}{\partial x^j}\frac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^a}\frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^b}+e_i\frac{\partial^2 x^i}{\partial\bar{x}^a\partial\bar{x}^b}$$

$$=(\Gamma_i{}^k{}_j e_k+b_{ij}n)\frac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^a}\frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^b}+e_k\frac{\partial^2 x^k}{\partial\bar{x}^a\partial\bar{x}^b}.$$

こうして n 方向は消えて

$$\bar{\Gamma}_a{}^c{}_b\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^c}=\Gamma_i{}^k{}_j\frac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^a}\frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^b}+\frac{\partial^2 x^k}{\partial\bar{x}^a\partial\bar{x}^b}. \qquad (13.4)$$

これはまた (8.6) と本質的に同じである． しかし導き方はまったく異なることに注意しよう．というのは，(8.6) は (6.8) によるのであるが， そこでは直交座標 (X^j) が用いられた． しかし一般の曲面ではそのような便利な座標はない．反対に (13.4) を導いた方法は平面の場合にも適用されるのは当然である．平面とは特殊な曲面であるから．

平面上でテンソルの共変微分法 (8.8) を定義したが，曲面の場合も同様で，単に $\Gamma_j{}^i{}_k$ を用いて修正するだけである．ただし， また (7.2′) を導いた方法は曲面には適用できない． というのは U^i は直交座標に関する成分だから．

ここでは $u^i{}_{;j}$ が (1,1)-テンソルであることを直接に導くことにしよう.
(13.2) より

$$\frac{\partial u^i}{\partial x^j}=\frac{\partial \bar{u}^a}{\partial \bar{x}^b}\frac{\partial \bar{x}^b}{\partial x^j}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a}+\bar{u}^a\frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^a\partial \bar{x}^b}\frac{\partial \bar{x}^b}{\partial x^j}.$$

(13.4) により

$$=\frac{\partial \bar{u}^a}{\partial \bar{x}^b}\frac{\partial \bar{x}^b}{\partial x^j}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a}+\bar{u}^a\left(\bar{\Gamma}_a{}^c{}_b\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^c}-\Gamma_k{}^i{}_h\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^a}\frac{\partial x^h}{\partial \bar{x}^b}\right)\frac{\partial \bar{x}^b}{\partial x^j}$$

$$=\frac{\partial \bar{u}^a}{\partial \bar{x}^b}\frac{\partial \bar{x}^b}{\partial x^j}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a}+\bar{u}^c\bar{\Gamma}_c{}^a{}_b\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a}\frac{\partial \bar{x}^b}{\partial x^j}-u^k\Gamma_k{}^i{}_j.$$

これは

$$\frac{\partial u^i}{\partial x^j}+u^k\Gamma_k{}^i{}_j=\left(\frac{\partial \bar{u}^a}{\partial \bar{x}^b}+\bar{u}^c\bar{\Gamma}_c{}^a{}_b\right)\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a}\frac{\partial \bar{x}^b}{\partial x^j}.$$

したがって

(13.5) $$u^i{}_{;j}=\frac{\partial u^i}{\partial x^j}+u^k\Gamma_k{}^i{}_j$$

が (1,1)-テンソルであることが示された.

§7 のリッチの lemma

(13.6) $$g_{ij;k}=\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}-g_{hj}\Gamma_i{}^h{}_k-g_{ih}\Gamma_j{}^h{}_k$$

もすぐ示されよう. (11.1′) を x^k で微分してガウスの方程式 (12.3) を代入すればよい. また (13.6) から (6.3) と同じ

(13.7) $$2\Gamma_{ijk}=\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}$$

もすぐ示される.

(11.3) に g_{ij} の行列式 g が現われたが, (13.3) により

(13.8) $$\bar{g}=gJ^2,\qquad J=\left|\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a}\right|$$

がえられ, g はスカラーではない. §16 で曲面の面積を考えるときにこの量 g が必要になる. b_{ij} の行列式 b についても $\bar{b}=bJ^2$ となる. 一般にテンソルの定義式 (8.4) の右辺に J^p をつけて, **重さ p の相対テンソルの定義**

を与えるが，(13.8) により，g は重さ 2 の相対スカラーである．また (1,1)-テンソル T_j^i に g を掛けて gT_j^i を作れば，これは重さ 2 の相対 (1,1)-テンソルである．相対テンソルの概念は § 38 で重要になる．

§ 14. ガウス，コダッチの公式

すでにガウスの方程式 (12.3) とワインガルテンの方程式 (12.5) がえられた．これらは平面曲線の場合のフレネー・セレーの公式 (9.2) に相当するとみられるが，非常に異なる点は，(9.2) の左辺は（常）微係数であるのに，(12.3), (12.5) の左辺は偏微係数であるということである．

たとえば，2変数 x, y の関数 z に関して，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=ay, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=bx$$

を考えよう．ここに a, b は定数としておくが，勝手に a, b を与えるわけにゆかない．すなわち

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

より，$a=b$ でなければならない．

このように，(12.3), (12.5) においても，右辺にでてくる係数 $\Gamma_j{}^i{}_k$, b_{ij} は何らかの関係をみたさなければならないであろうと考えられる．

(12.3), (12.5) 以外に，(9.2) の第1式に相当する式

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x^i}=\boldsymbol{e}_i \tag{14.1}$$

を考えなければならない．これは $\boldsymbol{x}=(X^a)$ で，$\boldsymbol{e}_i$ の定義式にすぎない．そこで

$$\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x^i}\right)=\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x^j}\right) \tag{14.2}$$

を考えよう．しかしこれは (12.3) により成り立っている．そのことが $\Gamma_i{}^k{}_j$, b_{ij} の i, j に関する対称性にほかならないのである．

次に (12.3) を考えよう．

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial x^j}\right)=\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial x^k}\right). \tag{14.3}$$

これは (12.3), (12.5) により

$$(\text{左辺}) = \frac{\partial \Gamma_i{}^h{}_j}{\partial x^k} e_h + \Gamma_i{}^h{}_j (\Gamma_h{}^l{}_k e_l + b_{hk} n) + \frac{\partial b_{ij}}{\partial x^k} n + b_{ij}(-b_k{}^l e_l).$$

上式は接する方向と法線方向とに分けられている. これを用いて (14.3) が書きくだせるわけであるが, 長くなるので, 今後もしばしば用いる略記記号 $\mathfrak{S}_{jk}$ をここで定義しよう. これは, たとえば,

$$\mathfrak{S}_{jk}\{A_{ij}B_k\} = A_{ij}B_k - A_{ik}B_j$$

という意味で, { } の中の項と, それにおいて j と k を交換してできる項との差をとるのである. これを用いると, (14.3) は

$$\left[\mathfrak{S}_{jk}\left\{\frac{\partial \Gamma_i{}^h{}_j}{\partial x^k} + \Gamma_i{}^l{}_j \Gamma_l{}^h{}_k - b_{ij} b_k{}^h\right\}\right] e_h + \left[\mathfrak{S}_{jk}\left\{\frac{\partial b_{ij}}{\partial x^k} + \Gamma_i{}^h{}_j b_{hk}\right\}\right] n = 0$$

と表わされる. したがって [ ] の中はともに 0 である. 第1の [ ] の中について,

(14.4)　$$R_i{}^h{}_{jk} = \mathfrak{S}_{jk}\left\{\frac{\partial \Gamma_i{}^h{}_j}{\partial x^k} + \Gamma_i{}^l{}_j \Gamma_l{}^h{}_k\right\}$$

とおけば

(14.5)　$$R_i{}^h{}_{jk} = b_{ij} b_k{}^h - b_{ik} b_j{}^h$$

がえられる. これを**ガウスの公式**という. b_{ij} はテンソルであったから, $R_i{}^h{}_{jk}$ も (1,3)-テンソルである. これを曲面の**曲率テンソル**という. 次に第2の [ ] の中について, $\partial b_{ij}/\partial x^k$ はテンソルではないから, これを共変微係数 $b_{ij;k}$ に書きかえるべきである. そうすれば,

(14.6)　$$b_{ij;k} - b_{ik;j} = 0$$

がえられることはすぐわかる. これを**コダッチの公式**という.

最後に (12.5) を考えよう.

(14.7)
$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial x^j}\right)=\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial x^k}\right).$$

この式の左辺は

$$-\frac{\partial b_j{}^i}{\partial x^k}\boldsymbol{e}_i-b_j{}^i(\Gamma_i{}^h{}_k\boldsymbol{e}_h+b_{ik}\boldsymbol{n})$$

であるから，(14.7) は

(14.8)
$$\mathfrak{S}_{jk}\left\{-\frac{\partial b_j{}^i}{\partial x^k}-b_j{}^h\Gamma_h{}^i{}_k\right\}=0,$$

(14.9)
$$\mathfrak{S}_{jk}\{-b_j{}^ib_{ik}\}=0$$

と同じである．しかしこれら 2 式は何ら新しい条件を与えない．(14.8) はコダッチの公式 (14.6) と本質的に同じであり， それはリッチの lemma (13.6) を用いてすぐ示される． また (14.9) は b_{ij}, g_{ij} の対称性から明らかに成り立つ．

D. Codazzi (1824～1875) はイタリーの人．パリのアカデミーが 1860 年に提出した問題“曲面の等長写像を研究せよ”に答えたことが知られている．1859 年に書かれたがその死後に出版された論文の中で (14.6) を与えた． 彼は知らなかったが， 実は先輩 G. Mainardi (1800～1879) が 1856 年に書いた論文の中でこの公式はすでに与えられていたのである． それで (14.6) をマイナルディ・コダッチの公式（または方程式）ともいう．

これら 2 つの公式は曲面論で甚だ重要であることは次節で示されよう．ここでは次のことを注意しよう．まず曲率テンソル $R_i{}^h{}_{jk}$ であるが，これは第 1 基本量 g_{ij} とその第 2 次までの偏微係数で作られている． したがって， ガウスの公式 (14.5) は，g_{ij} とその第 2 次までの偏微係数および第 2 基本量 b_{ij} の間の関係を与えるものである． これに対して， コダッチの方程式 (14.6) は b_{ij} とその第 1 次偏微係数， そうして共変微分するために，g_{ij} とその第 1 次偏微係数を含む関係式である．したがって，g_{ij}, b_{ij} はこれら 2 組の偏微分方程式をみたさなければならないのである．

後のために，(14.5) を少し変形しよう． § 8 で (1,0)-テンソル u^i から (0,1)-テンソル v_i を作ったように，(1,3)-テンソル $R_i{}^h{}_{jk}$ から

(14.10)
$$R_{iljk}=g_{lh}R_i{}^h{}_{jk}$$

という (0,4)-テンソルが作られる．いわゆる純粋共変曲率テンソルである．これを用いれば，ガウスの公式 (14.5) は

(14.5′) $$R_{iljk}=b_{ij}b_{lk}-b_{ik}b_{lj}$$

と表わされる．

§15. 基本定理

前節において，第1，第2基本量 g_{ij}, b_{ij} が (14.5), (14.6) をみたさなければならないことが示された．ではさらにみたすべき方程式があるのだろうか．実はこれらだけである．このことはこの節で証明する基本定理から明らかになる．

さて，これまで曲面について考えてきたことをここでまとめてみよう．まず (14.1), すなわち

(15.1) $$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x^i}=\boldsymbol{e}_i$$

によって接ベクトル，したがって接平面がえられ，また法ベクトル $\boldsymbol{n}$ がえられた．これら $\boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{n}$ は連立偏微分方程式であるガウスの方程式

(15.2) $$\frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial x^j}=\Gamma_i{}^k{}_j\boldsymbol{e}_k+b_{ij}\boldsymbol{n}$$

とワインガルテンの方程式

(15.3) $$\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial x^j}=-b_j{}^i\boldsymbol{e}_i$$

をみたす．そうして，これらの係数 $\Gamma_i{}^k{}_j$, b_{ij} は，ガウスの公式

(15.4) $$R_{iljk}=b_{ij}b_{lk}-b_{ik}b_{lj}$$

とコダッチの公式

(15.5) $$b_{ij;k}-b_{ik;j}=0$$

をみたさなければならない．

ところで，(15.4), (15.5) は (14.3), (14.7) にほかならず，またすでに見たように (14.2) は成り立つ．ゆえに連立偏微分方程式の定理により，次のことが結論される．

g_{ij}, b_{ij} という x^1, x^2 の関数を (15.4), (15.5) をみたすように与えたとする．このとき連立偏微分方程式 (15.1), (15.2), (15.3) は解 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{n}$ をもち，初期条件 ($x^i = x_0{}^i$ における $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{n}$ の値) を与えれば解は一意に定まる．

それでは，これら g_{ij}, b_{ij} をそれぞれ第 1, 第 2 基本量とする曲面がベクトル $\boldsymbol{x}$ の終点の軌跡で与えられるか・・・というと，そうではない．この軌跡に対して，解 $\boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{n}$ がそれぞれ接ベクトル，法ベクトルになっているだろうか．さらに $g_{ij} = \boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$ となっているだろうか．(15.1) により $\boldsymbol{e}_i$ は接ベクトルになっているから，考えるべきことは，

$$y_{ij} = g_{ij} - \boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j, \tag{15.6}$$

$$y_i = \boldsymbol{e}_i\boldsymbol{n}, \tag{15.7}$$

$$y = \boldsymbol{n}^2 - 1 \tag{15.8}$$

が常に 0 になっているだろうかということだけである．まず y_{ij} を考えよう．

$$\frac{\partial y_{ij}}{\partial x^k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial x^k}\boldsymbol{e}_j - \boldsymbol{e}_i\frac{\partial \boldsymbol{e}_j}{\partial x^k}.$$

微分方程式 (15.1)～(15.3) の解について考えているのであるから

$$= \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - (\Gamma_i{}^h{}_k\boldsymbol{e}_h + b_{ik}\boldsymbol{n})\boldsymbol{e}_j - \boldsymbol{e}_i(\Gamma_j{}^h{}_k\boldsymbol{e}_h + b_{jk}\boldsymbol{n}).$$

しかしここで，たとえば $\boldsymbol{n}\boldsymbol{e}_j = 0$ としてはいけない．(それを証明しようとしている！)

$$= \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma_i{}^h{}_k(g_{hj} - y_{hj}) - b_{ik}(y_j)$$
$$- \Gamma_j{}^h{}_k(g_{ih} - y_{ih}) - b_{jk}(y_i).$$

ここに (13.6) を用いて

$$\frac{\partial y_{ij}}{\partial x^k} = \Gamma_i{}^h{}_k y_{hj} + \Gamma_j{}^h{}_k y_{ih} - b_{ik}y_j - b_{jk}y_i. \tag{15.9}$$

同様にして

$$\frac{\partial y_i}{\partial x^k} = b_k{}^j y_{ji} + \Gamma_i{}^j{}_k y_j + b_{ik}y, \tag{15.10}$$

(15.11)
$$\frac{\partial y}{\partial x^k} = -2b_k{}^j y_j$$

がえられる．

これら (15.9)～(15.11) は y_{ij}, y_i, y のみたすべき連立偏微分方程式である．また微分方程式論で知られた解の一意性定理を用いよう．(15.9)～(15.11) が解をもてば，初期条件によって一意に定まる．ところがこれら3式の右辺はどれも y_{ij}, y_i, y の斉1次式だから，y_{ij}, y_i, y が恒等的に 0 であれば成り立つ．こうして初期条件を $y_{ij}=y_i=y=0$ とすれば，恒等的に $y_{ij}=y_i=y=0$ が成り立つ．ゆえに $x^i=x_0{}^i$ で y_{ij}, y_i, y がすべて 0 であるように $\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{n}$ をとれば，恒等的に $\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j=g_{ij}$ で，$\boldsymbol{n}$ は $\boldsymbol{e}_i$ に垂直な単位ベクトルである．したがって $\boldsymbol{x}$ の終点の軌跡である曲面は g_{ij}, b_{ij} をそれぞれ第 1，第2基本量とし，$\boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{n}$ はそれぞれ接ベクトルと法ベクトルである．

以上で，ガウス，コダッチの公式のもとで，曲面の存在定理が確立された．しかし曲面の一意性はどうか．すでに初期条件のもとでの一意性はわかっているから，問題は次のようである．ある初期条件でえられた解を $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{n}$ とし，もう 1 つの初期条件でえられた解を $\boldsymbol{x}'$, $\boldsymbol{e}_i'$, $\boldsymbol{n}'$ としよう．曲面 $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{x}'$ の関係はどうか．

$\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{n}$ の成分をそれぞれ $(X_1{}^\alpha)$, $(X_2{}^\alpha)$, $(X_3{}^\alpha)$ とし，3次の行列 $(X_\beta{}^\alpha)$ $(\alpha, \beta=1, 2, 3)$ を考えよう．これは正則である．というのはこれら3つのベクトルは1次独立だからである．そこでその逆行列を $(Y_\beta{}^\alpha)$ とする．同様に $\boldsymbol{e}_1'$, $\boldsymbol{e}_2'$, $\boldsymbol{n}'$ の成分の行列 $(X'_\beta{}^\alpha)$ を考えよう．そうして

(15.12)
$$O_\beta{}^\alpha = X'_\gamma{}^\beta Y_\alpha{}^\gamma$$

とする（$\sum_\gamma$ が省略されている)．そうして以下において

(15.13)
$$X_\beta{}^\alpha = O_\gamma{}^\alpha X'_\beta{}^\gamma$$

であり，行列 $(O_\beta{}^\alpha)$ は直交行列で，しかも $O_\beta{}^\alpha$ は定数であることを示そう．そうすれば，上式で $\beta=i$ $(=1, 2)$ とすれば，

$$\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^i} = O_\gamma{}^\alpha \frac{\partial X'^\gamma}{\partial x^i}.$$

これを積分して

$$X^\alpha = O_\gamma{}^\alpha X'^\gamma + O^\alpha.$$

ここに O^α は積分定数である．この式は，曲面 $\boldsymbol{x}'$ から曲面 $\boldsymbol{x}$ へ，回転と平行移動で移れることを示しているから，２つの曲面は合同で，場所だけが異なるわけである．

(15.13) を示そう．

$$O_\gamma{}^\alpha X'_\beta{}^\gamma = X'_\lambda{}^\gamma Y_\alpha{}^\lambda X'_\beta{}^\gamma = X_\lambda{}^\gamma X_\beta{}^\gamma Y_\alpha{}^\lambda = \delta^\gamma_\alpha X_\beta{}^\gamma = X_\beta{}^\alpha.$$

ただし

$$X'_\lambda{}^\gamma X'_\beta{}^\gamma = X_\lambda{}^\gamma X_\beta{}^\gamma$$

を利用したが，これは，たとえば $\lambda=1$, $\beta=3$ なら $\boldsymbol{e}_1'\boldsymbol{n}'=\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{n}$ で共に 0 だから成り立つ．

次に $(O_\beta{}^\alpha)$ が直交行列であることを示そう．

$$X_\alpha{}^\gamma X_\beta{}^\gamma = O_\lambda{}^\gamma X'_\alpha{}^\lambda \cdot O_\mu{}^\gamma X'_\beta{}^\mu.$$

上に示したように

$$= X'_\alpha{}^\gamma X'_\beta{}^\gamma$$

であるから

$$O_\lambda{}^\gamma O_\mu{}^\gamma = \delta^\mu_\lambda.$$

最後に $O_\beta{}^\alpha$ が定数であることを示そう．$X_\beta{}^\alpha$, $X'_\beta{}^\alpha$ は (15.2), (15.3) をみたすが，これらの方程式を総合して簡単に

$$\frac{\partial X_\beta{}^\alpha}{\partial x^i} = \Gamma_\beta{}^\gamma{}_i X_\gamma{}^\alpha$$

と表わしておく．$X'_\beta{}^\alpha$ も上式をみたすものである．そこで (15.13) により，上式の

$$左辺 = \frac{\partial O_\lambda{}^\alpha}{\partial x^i} X'_\beta{}^\lambda + O_\lambda{}^\alpha(\Gamma_\beta{}^\mu{}_i X'_\mu{}^\lambda),$$

$$右辺 = \Gamma_\beta{}^\gamma{}_i O_\lambda{}^\alpha X'_\gamma{}^\lambda.$$

ゆえに $(\partial O_\lambda{}^\alpha/\partial x^i) X'_\beta{}^\lambda = 0$, したがって $\partial O_\lambda{}^\alpha/\partial x^i = 0$ が示された．

以上により，次の基本定理が示されたことがわかる．

定理 曲面の第1，第2基本量 g_{ij}, b_{ij} はガウス，コダッチの公式 (15.4)，(15.5) をみたす．

逆にこれら2つの公式をみたす g_{ij}, b_{ij} が与えられたとき，これらをそれぞれ第1，第2基本量とする曲面が存在し，合同なものを同一視すれば，ちょうど1つだけである．ただし g_{ij} は λ^i に関する2次型式 $g_{ij}\lambda^i\lambda^j$ が正定値であるとする．

この定理は偏微分方程式論のふつうの解の存在定理を用いて証明されたから，局所的である．すなわち，ある点の適当な近傍においての話である．

例 2.7 §12 の例 2.6 において半径 a の直円柱を考えた．

$$g_{11}=1,\qquad g_{12}=0,\qquad g_{22}=a^2,$$
$$b_{11}=0,\qquad b_{12}=0,\qquad b_{22}=a.$$

これら g_{ij} は定数だから (14.4) により $R_i{}^h{}_{jk}=0$. これからガウスの公式 (15.4) が成り立つことは明らかであろう．また $\Gamma_j{}^i{}_k=0$ だから $b_{ij;k}=\partial b_{ij}/\partial x^k=0$ であり，コダッチの公式 (15.5) も成り立つことがわかる．

例 2.8 半径 a の球面について，§10 の例 2.3 から

$$g_{11}=a^2,\qquad g_{12}=0,\qquad g_{22}=a^2\sin^2 x^1$$

がすぐえられる．これから，

$$\Gamma_{111}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}+\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}-\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}\right)=0,$$
$$\Gamma_{121}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial x^1}+\frac{\partial g_{12}}{\partial x^1}-\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}\right)=0.$$

同様にして，

$$\Gamma_{112}=0,\qquad \Gamma_{122}=a^2\sin x^1\cos x^1,$$
$$\Gamma_{212}=-a^2\sin x^1\cos x^1,\qquad \Gamma_{222}=0.$$

さらに，

$$g^{11}=\frac{1}{a^2},\qquad g^{12}=0,\qquad g^{22}=\frac{1}{a^2\sin^2 x^1}$$

を用いて

$$\Gamma_1{}^1{}_1=g^{1i}\Gamma_{1i1}=g^{11}\Gamma_{111}=0,$$
$$\Gamma_1{}^2{}_1=g^{2i}\Gamma_{1i1}=g^{22}\Gamma_{121}=0.$$

同様に

$$\Gamma_1{}^1{}_2=0,\qquad \Gamma_1{}^2{}_2=\cot x^1,$$
$$\Gamma_2{}^1{}_2=-\sin x^1\cos x^1,\qquad \Gamma_2{}^2{}_2=0.$$

そこで曲率テンソルの成分は，

$$R_1{}^1{}_{12}=0,\qquad R_2{}^1{}_{12}=-\sin^2 x^1,$$
$$R_1{}^2{}_{12}=1,\qquad R_2{}^2{}_{12}=0.$$

ゆえに

$$R_{1212}=g_{2i}R_1{}^i{}_{12}=g_{22}R_1{}^2{}_{12}=a^2\sin^2 x^1,$$
$$R_{2112}=g_{1i}R_2{}^i{}_{12}=g_{11}R_2{}^1{}_{12}=-a^2\sin^2 x^1$$

および $R_{1112}=R_{2212}=0$ がえられる．b_{ij} を作ろう．

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_1}{\partial x^1}=(-a\sin x^1\cos x^2,\quad -a\sin x^1\sin x^2,\quad -a\cos x^1),$$
$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_1}{\partial x^2}=(-a\cos x^1\sin x^2,\quad a\cos x^1\cos x^2,\quad 0),$$
$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_2}{\partial x^2}=(-a\sin x^1\cos x^2,\quad -a\sin x^1\sin x^2,\quad 0),$$
$$b_{11}=\frac{\partial \boldsymbol{e}_1}{\partial x^1}\boldsymbol{n}=-a,\qquad b_{12}=0,\qquad b_{22}=-a\sin^2 x^1.$$

したがってガウスの公式（15.4）は本質的に

$$R_{1212}=a^2\sin^2 x^1=b_{11}b_{22}-(b_{12})^2$$

だけである．次に

$$b_{11;2}=\frac{\partial b_{11}}{\partial x^2}-2b_{1i}\Gamma_1{}^i{}_2=0,\qquad b_{12;1}=0$$

であるから，コダッチの公式（15.5）も成り立つことがわかる．

上の例で大切なことは

$$b_{ij}=-\frac{1}{a}g_{ij} \tag{15.14}$$

が成り立つことである．負号は本質的ではない．というのは，$\boldsymbol{n}$ の代りに $-\boldsymbol{n}$ をあらためて $\boldsymbol{n}$ とすれば，b_{ij} は $-b_{ij}$ となるからである．さらに，上式は球面上のいかなる座標に関しても成り立つ．というのは両辺ともにテンソルであるから．

逆に（15.14）がみたされるとき，具体的に（15.1）～（15.3）を積分することができる．というのは（15.3）は

$$\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial x^j}=\frac{1}{a}\boldsymbol{e}_j=\frac{1}{a}\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x^j},$$

$$\boldsymbol{n}=\frac{1}{a}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}_0.$$

ここに $\boldsymbol{x}_0$ は定点（積分定数）である．$\boldsymbol{x}_0$ を座標原点にとれば，上式は $\boldsymbol{x}=$

$\boldsymbol{an}$ となり，$\boldsymbol{n}$ は単位ベクトルであるから $|\boldsymbol{x}|=a$. ゆえに $\boldsymbol{x}$ の終点は原点から定距離 a にあり，球面をえがく（(15.2) は用いなかった）. ここで a は定数であることを利用したが，実は b_{ij} が g_{ij} に比例すれば，(15.14) のように，g_{ij} の係数は定数である．というのは，

$$b_{ij}=Kg_{ij}$$

とすれば，(13.6) により

$$b_{ij;k}=K_{;k}g_{ij}.$$

(15.5) により

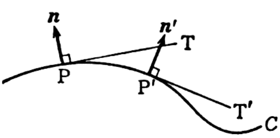
$$0=K_{;k}g_{ij}-K_{;j}g_{ik}.$$

これに g^{ij} を掛けて，i と j について加えれば，$0=K_{;k}$ がえられるから，$K_{;k}=\partial K/\partial x^k=0$ である．

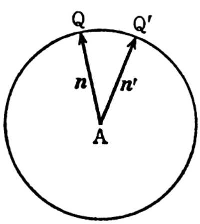
もし $K=0$ なら，$b_{ij}=0$ だから $\partial\boldsymbol{n}/\partial x^j=0$. ゆえに $\boldsymbol{n}$ は定ベクトルである．法ベクトル $\boldsymbol{n}$ が定ベクトルであるものが平面であることはすぐ示されよう．よって，

定　理　球面または平面であるための必要十分条件は，第 2 基本量が第 1 基本量に比例することである．

§ 16. 曲　率



2-4 図



2-5 図

平面曲線の曲率はよく知られているが，曲面の曲率をある量で表わそうという努力によって，誠に重大なことを知ることになる．平面曲線 C の曲率は，2-4 図において，2 つの接線 PT，P′T′ のなす角 $\Delta\theta$（ラジアン）と弧長 $\widehat{\mathrm{PP'}}=\Delta s$ の比の極限

$$\lim_{\mathrm{P'}\to\mathrm{P}}\frac{\Delta\theta}{\Delta s}=\frac{d\theta}{ds}$$

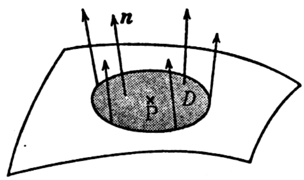
の絶対値として定義される．しかし，この考えを曲面にそのまま拡張しようとしても無理であ

ろう．そこで $d\theta/ds$ を別の立場でみよう．PT と P′T′ のなす角といっても，P, P′ における法線 $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}'$ のなす角といっても同じである．そこで 2-5 図のように，単位法線 $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}'$ の始点を点 A に一致させれば，その終点 Q, Q′ は単位円周上にあって，ラジアンの定義から，$\Delta\theta = \widehat{QQ'}$ である．

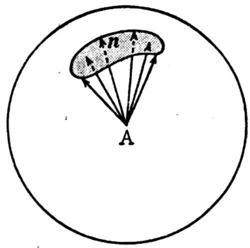
そこで曲面に対して，上の ds の代りに小領域の面積 $d\sigma$ を，上の $\boldsymbol{n}$ の代りに曲面の法ベクトル $\boldsymbol{n}$ をとって，まったく同様に曲率を定義しようというわけである．すなわち 2-6 図において，曲面上の点 P を含む小領域 D を考え，その面積を $\Delta\sigma$ とする．他方 D の各点における $\boldsymbol{n}$ の始点をすべて点 A にすれば，その終点は単位球面上の小領域をえがくであろう (2-7 図)．その面積を $\Delta\Sigma$ として，極限値

$$\lim \frac{\Delta\Sigma}{\Delta\sigma} = \frac{d\Sigma}{d\sigma}$$

の絶対値を考えるわけである．lim は D を点 P に収束させることである．



2-6 図



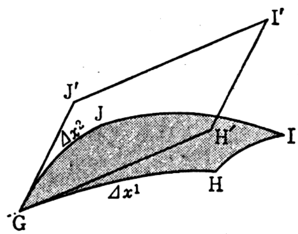
2-7 図

さて，曲面の小部分の面積を計算しておかなければならない．曲面上に 4 点

$\mathrm{G}(x^1, x^2)$,　　$\mathrm{H}(x^1+\Delta x^1, x^2)$,

$\mathrm{J}(x^1, x^2+\Delta x^2)$,

$\mathrm{I}(x^1+\Delta x^1, x^2+\Delta x^2)$



2-8 図

をとって，これらを媒介曲線で結んでえられる平行四辺形（のような）GHIJ の面積を，$\widehat{GH}$ に G で接し $\widehat{GH} = GH'$ である GH′ と，同様の GJ′ を 2 隣辺とする小平行四辺形でおきかえて面積を計算する (2-8 図)．

$$\overrightarrow{GH'} = \boldsymbol{e}_1 \Delta x^1, \qquad \overrightarrow{GJ'} = \boldsymbol{e}_2 \Delta x^2,$$

$$(GH')^2 = g_{11}(\Delta x^1)^2, \qquad (GJ')^2 = g_{22}(\Delta x^2)^2.$$

$\angle \mathrm{H'GJ'}=\theta$ とすれば，

$$\cos^2\theta=\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{GH'}}}{\mathrm{GH'}}\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{GJ'}}}{\mathrm{GJ'}}\right)^2=\frac{(g_{12})^2}{g_{11}g_{22}},$$

$$\sin^2\theta=\frac{g_{11}g_{22}-(g_{12})^2}{g_{11}g_{22}}=\frac{g}{g_{11}g_{22}}.$$

よって

$$\Delta\sigma=\mathrm{GH'}\cdot\mathrm{GJ'}\cdot\sin\theta=\sqrt{g}\,|\Delta x^1\Delta x^2|.$$

よって曲面の面積の微分 $d\sigma$ は

(16.1) $$d\sigma=\sqrt{g}\,|dx^1dx^2|.$$

他方 $d\Sigma$ を求めるには上の公式をそのまま利用すればよい．(16.1) はベクトル $\boldsymbol{x}$ の終点のえがく曲面について計算したものである．$d\Sigma$ はベクトル $\boldsymbol{n}$ の終点のえがく曲面について計算すればよい．その第1基本量を a_{ij} とすれば，(11.1′) により，

$$a_{ij}=\frac{\partial\boldsymbol{n}}{\partial x^i}\frac{\partial\boldsymbol{n}}{\partial x^j}.$$

ワインガルテンの方程式 (12.5) により

$$=b_i{}^h\boldsymbol{e}_h\cdot b_j{}^k\boldsymbol{e}_k=b_{il}g^{hl}b_j{}^kg_{hk}=b_{il}b_{jh}g^{hl}.$$

よって，行列式 $|b_{ij}|$ の値を b とすれば，(16.1) の g に相当する行列式 $|a_{ij}|$ は b^2/g であることがわかる．よって

$$d\Sigma=\sqrt{\frac{b^2}{g}}\,|dx^1dx^2|.$$

ゆえに

$$\frac{d\Sigma}{d\sigma}=\frac{|b|}{|g|}$$

となった．ここで (11.4) により $|g|=g$ であるが，b の正負については断定できない．それで絶対値ではなく，

(16.2) $$K=\frac{b}{g}=\frac{b_{11}b_{22}-(b_{12})^2}{g_{11}g_{22}-(g_{12})^2}$$

そのものを，点 P における**曲面の曲率**と定義しよう．法ベクトル $\boldsymbol{n}$ の向

きづけを反対にすれば，b_{ij} は $-b_{ij}$ になるが，b はそのままである．したがって K は，$\boldsymbol{n}$ の向きづけに無関係である．(15.14) により，半径 a の球面の曲率は $1/a^2$ であることがわかる．

一般に曲面論において曲率と名のつくものには，主曲率，平均曲率，全曲率，測地的曲率などがある．ここでは**全曲率**（**ガウス曲率**ともいう）のことを単に曲率ということにした．例 2.7 によって，直円柱の K も 0 であるから，$K=0$ が平ら，$K\neq 0$ が曲がっているという直観的概念とは，すぐには結びつかない．実は $K=0$ とは平らなものから作れるということなのである（§ 18 参照）．

さて，ガウスの公式 (15.4) を観察しよう．その右辺は i と l，j と k を交換すれば負号がつく．すなわち

(16.3)
$$R_{iljk}=-R_{lijk}=-R_{ilkj}.$$

したがって $R_{11jk}=R_{22jk}=R_{il11}=R_{il22}=0$ であり，また $R_{21jk}=-R_{12jk}$，$R_{il21}=-R_{il12}$ が成り立つから，(15.4) は実は

$$R_{1212}=b_{11}b_{22}-(b_{12})^2$$

という唯一の式にすぎない．そうして (16.2) は

(16.2′)
$$K=\frac{R_{1212}}{g}$$

と表わされる．この節の始めの“誠に重大なことを知ることになる”は実はこの式である．というのは，R_{1212} は第 1 基本量とその第 1，第 2 次偏微係数から計算される．したがって，Gauss によって示された次の定理が結論できる．

定　理 (theorema egregium)　曲面の曲率はその第 1 基本量だけから計算され，第 2 基本量に無関係である．

前節の基本定理によって第 2 基本量 b_{ij} の重要さが十分示されたが，この egregious（ひどい，とてつもない）定理によって b_{ij} の影が薄れてしまったようである．g_{ij} と b_{ij} とで曲面の形が決まったのであるが，g_{ij} だけから曲率が決まってしまうならば，曲率は形そのものにはあまり関係がないようである．実際，平面と直円柱とは同じ曲率 0 をもつ．この大定理が次章で取扱うリーマン幾何学発火の導火線であったことは明らかであろう．

Gauss は，その最初の愛人（整数論）を忘れたことがなかったけれども，1820 年頃

から，地球の子午線の測定（したがって地球面の形状決定）に従事して，測地学，最小自乗法，曲面論へと関心が動いた．50 才頃にこれまでの研究をまとめて，一般曲面論という論文を書いた．この章の序文で述べた intrinsic（本来の，本質的，固有の）な性質とは，第1基本量だけから求まるもののことであり，曲率 K はまさにその1つである．§ 20 で述べる測地線もそうである．

§ 17. 線織面の曲率

∞^1 の，すなわち1つのパラメーターに関係して与えられた直線の族によって織られた曲面を **線織面** という．ここでは線織面の曲率を調べることにしよう．

線織面 S を織っている各直線を S の **母線** という．すべての母線に一度交わる空間曲線 C をとり，C の方程式をその弧長 s で

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}(s) \tag{17.1}$$

とする．すなわち，ある固定点 O から出るベクトル $\mathbf{y}(s)$ の終点の軌跡が C である．C の点 $\mathbf{y}(s)$ を通る母線上の単位ベクトルを $\mathbf{e}(s)$ とすれば，この母線上の点は

$$\mathbf{x} = \mathbf{y}(s) + t\mathbf{e}(s) \tag{17.2}$$

と，パラメーター t を用いて表わされる．上式が2つのパラメーター $(s,\ t)$ を用いて表わした S の方程式である．結局，もとの直線族はパラメーター s によって与えられたわけである．これを $\{l_s\}$ と表わそう．

線織面の理論で重要なものは **締括線** といわれる曲線である．すなわち，2つの近い母線 l_s, $l_{s+\Delta s}$ は一般にねじれの位置にあるだろう．したがってそれらの共通垂線がちょうど一つ決まるであろう．l_s 上の共通垂線の足の，$\Delta s \to 0$ の極限の位置 T_s (l_s 上の **中心** という）が定まるとき，点 T_s の軌跡が締括線である．したがって平行直線族で織られた柱面上では締括線は考えられない．

さて，l_s, $l_{s+\Delta s}$ の共通垂線の l_s 上の足を P，$l_{s+\Delta s}$ 上の足を P′ とすれば，それは t, t' の値を適当にとれば

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \mathbf{y}(s) + t\mathbf{e}(s), \qquad \overrightarrow{\mathrm{OP'}} = \mathbf{y}(s') + t'\mathbf{e}(s')$$

と表わせる．ここに $s' = s + \Delta s$ とする．P, P′ に対する条件は

$$(\boldsymbol{y}(s')+t'\boldsymbol{e}(s')-\boldsymbol{y}(s)-t\boldsymbol{e}(s))\boldsymbol{e}(s)=0,$$
$$(\boldsymbol{y}(s')+t'\dot{\boldsymbol{e}}(s')-\boldsymbol{y}(s)-t\boldsymbol{e}(s))\boldsymbol{e}(s')=0.$$

ここで

$$\boldsymbol{y}(s')-\boldsymbol{y}(s)=\varDelta\boldsymbol{y},$$
$$\boldsymbol{e}(s)\boldsymbol{e}(s')=\cos\varDelta\theta$$

とすれば，上の条件式は

$$\boldsymbol{e}(s)\varDelta\boldsymbol{y}=t-t'\cos\varDelta\theta,$$
$$\boldsymbol{e}(s')\varDelta\boldsymbol{y}=t\cos\varDelta\theta-t'$$

となり，t' を消去すれば

(17.3) $$(\boldsymbol{e}(s)-\boldsymbol{e}(s')\cos\varDelta\theta)\varDelta\boldsymbol{y}=t\sin^2\varDelta\theta$$

がえられる．ここに，

$$\boldsymbol{e}(s)\boldsymbol{e}(s')=\boldsymbol{e}(s)\left(\boldsymbol{e}(s)+\varDelta s\,\boldsymbol{e}'(s)+\frac{\varDelta s^2}{2}\boldsymbol{e}''(s)+\cdots\right)$$
$$=1+\frac{\varDelta s^2}{2}\boldsymbol{e}(s)\boldsymbol{e}''(s)+\cdots$$
$$=\cos\varDelta\theta=1-\frac{\varDelta\theta^2}{2}+\cdots$$

を用いれば，(17.3) は

$$-\varDelta s\,\boldsymbol{e}'(s)\varDelta\boldsymbol{y}=t\varDelta\theta^2+\cdots$$

となるから，

(17.4) $$t=\frac{\boldsymbol{y}'\boldsymbol{e}'}{\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}''}$$

がえられる．したがって分母 $\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}''$ ($=-(\boldsymbol{e}')^2$) が 0 でなければ締括線が存在する．分母が 0 になるときは $\boldsymbol{e}'$ が零ベクトルであり，$\boldsymbol{e}$ は定ベクトルであるから，柱面の場合にほかならない．

さて，締括線がある場合には，それをもとの (17.1) で与えられた曲線 C にとろう．ということは (17.4) の $t=0$ だから

(17.5) $$\boldsymbol{y}'\boldsymbol{e}'=0$$

である．したがって締括線の接ベクトル $\boldsymbol{y}'$ は $\boldsymbol{e}'$ に垂直である．

そこで線織面 (17.2) を考えよう. $(x^1, x^2)=(s, t)$ として,

(17.6) $$\boldsymbol{e}_1=\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial s}=\boldsymbol{y}'+t\boldsymbol{e}', \qquad \boldsymbol{e}_2=\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t}=\boldsymbol{e},$$

(17.7) $$g_{11}=1+t^2(\boldsymbol{e}')^2, \qquad g_{12}=\boldsymbol{y}'\boldsymbol{e}, \qquad g_{22}=1.$$

ここで (17.5) を用いた. 法ベクトル $\boldsymbol{n}$ は

(17.8) $$(\boldsymbol{y}'+t\boldsymbol{e}')\boldsymbol{n}=0, \qquad \boldsymbol{e}\boldsymbol{n}=0$$

をみたす.

$$b_{11}=\boldsymbol{n}\frac{\partial \boldsymbol{e}_1}{\partial s}, \qquad b_{12}=\boldsymbol{n}\frac{\partial \boldsymbol{e}_1}{\partial t}=\boldsymbol{n}\boldsymbol{e}', \qquad b_{22}=\boldsymbol{n}\frac{\partial \boldsymbol{e}_2}{\partial t}=0.$$

ゆえに

$$b=-(\boldsymbol{n}\boldsymbol{e}')^2.$$

これから曲率 K については, (16.2) により,

$$K=0 \iff \boldsymbol{n}\boldsymbol{e}'=0$$

がえられる.

さて, 曲率 K が 0 である線織面を求めよう. このとき (17.8) の第1式は $\boldsymbol{y}'\boldsymbol{n}=0$ となり, $\boldsymbol{y}', \boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}'$ はともに $\boldsymbol{n}$ に垂直, したがって1次従属になる. ゆえに

$$\alpha\boldsymbol{y}'+\beta\boldsymbol{e}+\gamma\boldsymbol{e}'=0$$

という $(\alpha, \beta, \gamma)\neq(0, 0, 0)$ がある. $\boldsymbol{e}'$ を内積して (17.5) を用いて $\gamma=0$ となり, $\boldsymbol{y}'$ と $\boldsymbol{e}$ は平行になる. ゆえに母線は (17.1) の曲線に接する. 逆にこのとき, (17.8) の第1式は $t\boldsymbol{e}'\boldsymbol{n}=0$ となり, $t\neq0$ なら $K=0$ の条件 $\boldsymbol{n}\boldsymbol{e}'=0$ が成り立つ.

$t=0$, すなわち締括線上では曲面の方程式 (17.2) は §10 の仮定をみたさない. というのは, $t=0$ なら $\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{y}'$ と $\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}$ となり, いまはこれが平行なのだから, (10.2) のヤコビアン行列の rank は 1 にさがってしまう.

そこで $K=0$ の線織面として母線が空間曲線に接する曲面, すなわち**接線曲面**がえられたが, 締括線が一点になってしまう $(\boldsymbol{y}'=0)$ ときも考えられる. すなわちどの母線もその点を通り, したがって錐面である. さらに柱面

では締括線が無いから，(17.5) 以下の理論は適用できないが，柱面の曲率が 0 であることはすぐわかる．したがって，曲率が 0 である線織面は接線曲面，錐面，柱面であることがわかった．

§ 18. 曲率が 0 の曲面

前節では，線織面であって曲率が 0 であるものすべてを求めた．しかし実はこれらが，曲率が 0 である曲面のすべてなのである．これを証明しよう．

$K=0$ とは，(16.2) により，第 2 基本量 b_{ij} の作る行列式 b が 0 となることである．したがって，2 次の行列 (b_{ij}) の rank は 0 か 1 である．このとき

$$b_{ij}=eb_ib_j, \qquad i, j=1, 2 \tag{18.1}$$

をみたす $e=\pm 1$ と b_i がある．というのは，rank が 0 なら $b_i=0$ ととればよい．rank が 1 なら，たとえば $b_{11}\neq 0$ としても一般性を失わない．($b_{11}=b_{22}=0$ なら $b_{12}=0$ となる)．そこで

$$b_{11}=e(b_1)^2, \qquad b_{12}=eb_1b_2$$

によって $e=\pm 1$, b_1, 次いで b_2 を定め，

$$0=b_{11}b_{22}-(b_{12})^2=e(b_1)^2b_{22}-(eb_1b_2)^2$$

より $b_{22}=e(b_2)^2$ も成り立つことがわかる．

さて，考えている曲面上で，微分方程式

$$b_idx^i=0$$

をみたす曲線を考えよう．その方程式を

$$X^\alpha=X^\alpha(x^1(t), x^2(t))$$

とする．すなわちその接ベクトル

$$u=\frac{dx^i}{dt}e_i$$

の接平面内の成分 $u^i=dx^i/dt$ は

$$b_iu^i=0 \tag{18.2}$$

をみたすのである．曲面上の各点を通ってそのような曲線がちょうど一本通っ

ており，いわば曲面がそのような曲線族で織られている．実はこの曲線は直線である．これを証明しよう．

（18.1）によって，コダッチの公式（14.6）は

$$b_{i;k}b_j - b_{i;j}b_k + b_i(b_{j;k} - b_{k;j}) = 0$$

と書ける．これに $u^i u^k$ を掛けて i, k について加えれば，（18.2）により

$$b_{i;k}u^i u^k b_j = 0$$

がえられる．行列 (b_{ij}) の rank が 1 なら，b_1, b_2 のどちらかは 0 でないから，上式から

（18.3）
$$b_{i;k}u^i u^k = 0$$

がえられる．次に（18.2）をこの曲線にそって微分すれば，

$$b_{i;j}\frac{dx^j}{dt}u^i + b_i u^i{}_{;j}\frac{dx^j}{dt} = 0.$$

したがって

$$b_{i;j}u^i u^j + b_i u^i{}_{;j}u^j = 0$$

がえられるが，これは（18.3）により

$$b_i u^i{}_{;j}u^j = 0$$

にすぎない．これと（18.2）を比較して

（18.4）
$$u^i{}_{;j}u^j = \lambda u^i$$

という関数 $\lambda(t)$ があることがわかる．そこで接ベクトル $\boldsymbol{u}$ を微分し，ガウスの方程式（12.3）と（18.2）により

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \frac{du^i}{dt}\boldsymbol{e}_i + u^i(\Gamma_i{}^k{}_j\boldsymbol{e}_k + b_{ij}\boldsymbol{n})u^j$$

$$= \left(\frac{du^i}{dt} + \Gamma_j{}^i{}_k u^j u^k\right)\boldsymbol{e}_i = u^i{}_{;j}u^j\boldsymbol{e}_i.$$

よって（18.4）により

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \lambda\boldsymbol{u}$$

がえられる．t として曲線の弧長 s をとれば，$\boldsymbol{u}$ は単位ベクトルであり，したがって $d\boldsymbol{u}/ds$ は $\boldsymbol{u}$ に垂直である．よって上式の λ は 0 でなければならな

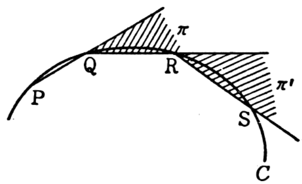
い．したがって考えている曲線の単位接ベクトルは定ベクトルであり，この曲線は直線である．

こうして，考えている曲面は直線で織られた線織面になる．

上の計算では (b_{ij}) の rank は 1 であるとしたが，もしそれが 0，すなわち $b_{ij}=0$ なら，曲面は平面であることは §15 の終りで注意した．したがって

定 理 曲率 K が 0 である曲面は 接線曲面，錐面，柱面の 3 種類である．

§16 で，$K=0$ といっても平面ではなく，平面から作れるものであると予告した．いまそれを考えよう．接線曲面について 2-9 図を参考にしよう．空間曲線 C の接線で織られる曲面を考えるのであるが，接線とは弦 PQ, QR, RS, ⋯ の極限である．これらの弦については，それぞれ 3 点 P, Q, R; Q, R, S ののっている平面 π, π' がえられる．これを極限にして考えれば，接線曲面は平面で作れそうだと考えられよう．



2-9 図

直観を裏付けるために解析的に考えよう．平面上では，たとえば斜交座標 (x^1, x^2) をとれば，g_{ij} は定数であり，$\Gamma_j{}^i{}_k$ は 0 であり，$R_h{}^i{}_{jk}$ は 0 であり，(16.2′) により $K=0$ となる．そこで逆に $K=0$ なら，g_{ij} が定数であるという座標 (x^i) がとれることを示そう．$K=0$ の曲面上に任意の座標 $(\bar{x}^i)$ がとられているとしよう．(13.4) によって，x^k のみたすべき微分方程式

$$\frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar{x}^a \partial \bar{x}^b}=\bar{\Gamma}_a{}^d{}_b \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^d} \tag{18.5}$$

を考える．すなわち (x^i) に関しては g_{ij} は定数，したがって $\Gamma_j{}^i{}_k$ は 0 となることを希望しているのであるから，求める (x^1, x^2) は上式をみたすべきである．(18.5) はこれら x^k に関する 2 階の微分方程式であるが，これを

$$\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^a}=X_a{}^k, \tag{18.6}$$

$$\frac{\partial X_a{}^k}{\partial \bar{x}^b}=\bar{\Gamma}_a{}^d{}_b X_d{}^k \tag{18.7}$$

と表わせば，x^k, $X_a{}^k$ に関する 1 階の微分方程式とみられる．§14 における

ように，これらの積分可能条件は，第1に

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}^b} X_a{}^k = \frac{\partial}{\partial \bar{x}^a} X_b{}^k$$

であるが，これは（18.7）の $\bar{\Gamma}_a{}^c{}_b$ が a, b に関して対称であるから成り立っている．第 2 に

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}^c} \bar{\Gamma}_a{}^d{}_b X_d{}^k = \frac{\partial}{\partial \bar{x}^b} \bar{\Gamma}_a{}^d{}_c X_d{}^k$$

であるが，これを（18.7）を用いて計算すれば，

$$\bar{R}_a{}^d{}_{bc} X_d{}^k = 0$$

となることがわかる．ところが $K=0$ としているから，（16.2′）により $\bar{R}_a{}^d{}_{bc}=0$ であり，したがって上式は成り立つ．

こうして，(18.6)，(18.7) をみたす x^k, $X_a{}^k$ があることがわかった．例によって初期条件を与えれば一意に定まる．初期条件のうち，$X_a{}^k$ については，行列式 $|X_a{}^k|$ が 0 でないようにとれば，適当な近傍でも 0 でなく，したがって（10.2）のヤコビアンは rank 2 となり，確かに（x^k）は曲面の座標と考えられる．この新座標（x^k）については，（18.5）により $\Gamma_j{}^i{}_k=0$ であり，したがって（13.6）により g_{ij} は定数である．

これ以後は，正定値 2 次型式の代数的理論により，

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$$

がさらに

$$ds^2 = du^2 + dv^2 \tag{18.8}$$

と書ける座標（u, v）があることがわかる（（x^1, x^2）から（u, v）への変換は定数係数の 1 次変換である）．

以上により，$K=0$ という曲面上には，（18.8）のような座標（u, v）があることがわかった． そうなれば， 平面 π 上の直交座標系に関して， 座標が（u, v）である点を， 曲面上の座標（u, v）である点に対応させれば， 計量関係は π 上のものがそのまま曲面上のものとみられ，これが“この曲面は平らな紙で作れる”ということの数学的表現であり， 上の対応を**等長的対応**とい

うのである．

ただし，上の微分方程式の積分可能条件は局所的であり，したがって $K=0$ の曲面の適当な（小さい）領域についての話にすぎないことを注意しておく．

§19. 回転面の曲率

回転面を方程式（11.11）を用いて調べよう．これは xz 平面上の曲線

$$\gamma:\quad x=\varphi(t),\qquad z=\psi(t)$$

を z 軸の回りに回転してできる回転面 S である．例 2.6 で求めたように，

$$b_{11}=\frac{\varphi'\psi''-\varphi''\psi'}{\sqrt{(\varphi')^2+(\psi')^2}},\qquad b_{12}=0,\qquad b_{22}=\frac{\varphi\psi'}{\sqrt{(\varphi')^2+(\psi')^2}}.$$

よって，曲率 K は（16.2）により

$$K=\frac{\psi'(\varphi'\psi''-\varphi''\psi')}{\{(\varphi')^2+(\psi')^2\}^2\varphi}. \tag{19.1}$$

γ の方程式を $z=f(x)$ として考えよう．$x=t$, $z=f(t)$ であるから，

$$K=\frac{f'f''}{x\{1+(f')^2\}^2} \tag{19.2}$$

となる．

すでに $K=0$ の曲面は決定したが，（19.2）で $K=0$ とおけば $f'=0$，または $f''=0$ である．$f'=0$ なら γ は z 軸に垂直な直線であり，S は平面である．$f'\neq 0$, $f''=0$ なら γ は（z 軸に平行でない）直線であり，したがって S は直円錐である．

さて，この節の目的は，曲率が 0 でない定数であるという回転面を求めることである．（19.2）を積分するために，

$$1+(f')^2=u$$

とおけば，（19.2）は

$$2Kxdx=\frac{du}{u^2}$$

となるから，K が定数であることを用いて積分して，

$$1+(f')^2=-\frac{1}{Kx^2+c}. \tag{19.3}$$

ここに c は積分定数である.

一般の値 c に対して (19.3) を積分するのは複雑であるから，まず $c=-1$ としよう．このとき (19.3) は

$$(f')^2=\frac{x^2}{\frac{1}{K}-x^2}$$

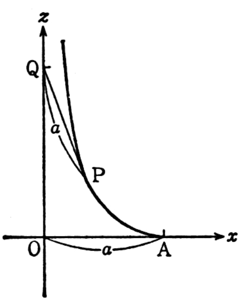
となるから，K は正でなければならない．そこで $K=\frac{1}{a^2}$ $(a>0)$ とおいて

$$f(x)=\pm\sqrt{a^2-x^2}+c.$$

ここに c は任意定数である．したがって γ は z 軸上に中心をもつ半径 a の円であり，この回転面は球面である.

次に (19.3) において $c=0$ とする．このとき K は負でなければならないから，$K=-\frac{1}{a^2}$ $(a>0)$ とおいて

$$1+(f')^2=\frac{a^2}{x^2}. \tag{19.4}$$



2-10 図

これを積分してもよいが，次のように考えよう．xz 平面上の曲線 γ 上の任意の点 $\mathrm{P}(x, z)$ における γ の接線が z 軸と交わる点を Q とすれば，

$$(\mathrm{PQ})^2=x^2\{1+(f')^2\}$$

である．ゆえに (19.4) は $\mathrm{PQ}=a$ であることを示している．したがって γ は，x 軸に点 $\mathrm{A}(a, 0)$ で接し，A から出発して z 軸に漸近する曲線である．このような曲線を **tractrix** (追跡線) という．したがって

定　理　tractrix がその漸近線の回りに回転してえられる回転面の曲率は負の定数 $\left(-\frac{1}{a^2}\right)$ である.

この曲面はラッパのような形である．これを **擬球** といい，a を半径という.

tractrix は犬線とも訳される．というのは，長さ a の紐をつけた犬をつれて z 軸上を人（点 Q）が歩くとき，犬（点 P）が引っぱられていやいや歩く道がこの曲線であるとみられるから．犬線は懸垂線の伸開線である．

§ 20. 測　地　線

§ 16 で Gauss が測地学に従事したことを述べた．**測地線**とは曲面上の曲線であって，その曲線上の 2 点 P, Q をこの曲面上で結ぶ曲線のうちで最短であるもののことである．地球を正確な球面とみれば，2 地点 A, B を結ぶ測地線は A, B を通る大円（中心と A, B を通る平面で切った切口の円）の劣弧 $\widehat{AB}$ であるが，本当の地球の形は複雑なので，地球面上の測地線の問題はなかなか難しく，測地学が重要になってくる．

一般に曲面上の曲線 $X^\alpha = X^\alpha(x^1(t),\ x^2(t))$ の $t=t_1$ から $t=t_2$ までの弧の長さは，(11.2) により

$$s=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{g_{ij}(x^1(t),\ x^2(t))\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}\,dt \tag{20.1}$$

で与えられる．被積分関数は x^1, x^2, dx^1/dt, dx^2/dt を含む．これを一般化して，$2n$ 変数の関数

$$L(x,y)=L(x^1,\ \cdots,\ x^n,\ y^1,\ \cdots,\ y^n)$$

を考え，x^i を 1 変数 t の関数とし，y^i を dx^i/dt として，積分

$$I=\int_{t_1}^{t_2}L\left(x,\ \frac{dx}{dt}\right)dt \tag{20.2}$$

を考えよう．L は $2n$ 変数の関数で，以下において必要な回数だけ偏微分可能と仮定するが，さらにもう 1 つの仮定を考慮しよう．というのは，(20.1) では

$$L(x,y)=\sqrt{g_{ij}(x)y^iy^j}$$

であるから，任意の数 λ について $L(x,\ \lambda y)=|\lambda|\cdot L(x,\ y)$ となる．よって

$$L(x,\ \lambda y)=\lambda L(x,\ y),\qquad \lambda>0 \tag{20.3}$$

が成り立つ．一般に上式をみたすとき，L は y^1, $\cdots$, y^n について**1 次正斉**

次であるという．この条件を考えた理由は次のようである．t は曲線上のパラメーターであるが，パラメーターを $\tau=\tau(t)$ にとりかえたとすれば，$\tau_\alpha=\tau(t_\alpha)$ $(\alpha=1, 2)$ として

$$I=\int_{\tau_1}^{\tau_2} L\left(x, \frac{dx}{d\tau}\frac{d\tau}{dt}\right)\frac{dt}{d\tau}d\tau.$$

よって (20.3) をみたせば，$d\tau/dt>0$ のとき

$$I=\int_{\tau_1}^{\tau_2} L\left(x, \frac{dx}{d\tau}\right)d\tau$$

となる．曲線の長さはパラメーターの取り方によらずに定まるから，I が上のように τ によっても表わされるべきである．$d\tau/dt>0$ は，曲線を t, τ の増加の方向に向きをつけたときに，同じ向きであるということにすぎない．

さて，(20.2) の I は，ある曲線 $x^i=x^i(t)$ にそって積分されたものであるが，これを別の曲線

$$C_\varepsilon: \qquad x^i=x^i(t)+\varepsilon u^i(t)$$

にそって t_1 から t_2 まで積分して $I(\varepsilon)$ がえられよう．

$$I(\varepsilon)=\int_{t_1}^{t_2} L\left(x+\varepsilon u, \frac{dx}{dt}+\varepsilon\frac{du}{dt}\right)dt.$$

これを ε の関数とみて $dI(\varepsilon)/d\varepsilon$ を求めるのに

$$L_i=\frac{\partial L}{\partial x^i}, \qquad L_{(i)}=\frac{\partial L}{\partial y^i}$$

という記号を用いて，

$$\frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon}=\int_{t_1}^{t_2}\left(L_i u^i+L_{(i)}\frac{du^i}{dt}\right)dt.$$

第2項を部分積分して，上式は

$$(20.4) \qquad I'(\varepsilon)=\Big[L_{(i)}u^i\Big]_{t_1}^{t_2}+\int_{t_1}^{t_2}\left(L_i-\frac{dL_{(i)}}{dt}\right)u^i dt.$$

ゆえに，$\varepsilon=0$ として

$$(20.4') \qquad I'(0)=\Big[L_{(i)}u^i\Big]_{t_1}^{t_2}+\int_{t_1}^{t_2}\left(L_i-\frac{dL_{(i)}}{dt}\right)u^i dt.$$

ここに $L_{(i)}$ 等では $\varepsilon=0$ であり，もとの曲線 C_0 上の値である．

さて，C_0 の両端点 $\mathrm{P}_\alpha(x^i=x^i(t_\alpha))$ $(\alpha=1,\ 2)$ を結ぶすべての曲線のうちで，C_0 が I に最小値を与えるとすれば，そのような特殊な曲線 C_ε の中でも C_0 が I に最小値を与えるべきであるから，$I'(0)=0$ が必要である．C_ε も P_α を通るとするから，$u^i(t_\alpha)=0$ である．よって (20.4′) により

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(L_i-\frac{dL_{(i)}}{dt}\right)u^i dt=0.$$

ここに u^i の任意性を用いれば，C_0 にそって

$$L_i-\frac{dL_{(i)}}{dt}=0 \tag{20.5}$$

が成り立たなければならない．(20.5) を**オイラー・ラグランジュの微分方程式**という．これは詳しく書けば

$$L_i\left(x,\ \frac{dx}{dt}\right)-\frac{\partial}{\partial x^j}L_{(i)}\left(x,\ \frac{dx}{dt}\right)\cdot\frac{dx^j}{dt}-\frac{\partial}{\partial y^j}L_{(i)}(x,\ y)\cdot\frac{d^2x^j}{dt^2}=0$$

$(y^j=dx^j/dt)$ と書けるから，曲線のみたすべき 2 階の連立常微分方程式である．

(20.5) を $F=L^2/2$ を用いて書き直せば，

$$F_i-\frac{dF_{(i)}}{dt}=L\left(L_i-\frac{dL_{(i)}}{dt}\right)-L_{(i)}\frac{dL}{dt}=-L_{(i)}\frac{dL}{dt}$$

となる．特に積分 (20.1) を考え，$t=s$ ととれば，s の増加の向きに積分して (20.3) により

$$L\left(x,\ \frac{dx}{ds}\right)=\frac{1}{ds}L(x,\ dx)=\frac{1}{ds}ds=1$$

となり，この曲線にそって $dL/ds=0$ であるから，(20.5) は

$$F_i-\frac{dF_{(i)}}{ds}=0 \tag{20.6}$$

とも表わされる．そこで

$$F=\frac{1}{2}g_{kl}(x)y^ky^l,$$

$$F_i=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}y^ky^l,$$

$$F_{(i)}=g_{ki}y^k,$$

$$\frac{dF_{(i)}}{ds}=\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^l}y^ky^l+g_{ki}\frac{dy^k}{ds}.$$

ここに (13.6) を用いて

$$F_i=\frac{1}{2}(g_{hl}\Gamma_k{}^h{}_i+g_{kh}\Gamma_l{}^h{}_i)y^ky^l=g_{kh}\Gamma_l{}^h{}_iy^ky^l,$$

$$\frac{dF_{(i)}}{ds}=(g_{hi}\Gamma_k{}^h{}_l+g_{kh}\Gamma_i{}^h{}_l)y^ly^k+g_{ki}\frac{dy^k}{ds}$$

となり，(20.6) は

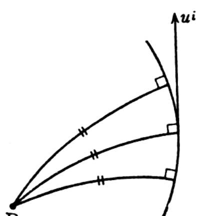
$$g_{ki}\frac{dy^k}{ds}+g_{hi}\Gamma_k{}^h{}_ly^ly^k=0.$$

これに g^{ji} を掛けて i について加えれば，

$$\frac{d^2x^j}{ds^2}+\Gamma_k{}^j{}_l\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds}=0 \tag{20.7}$$

がえられる．

2階の常微分方程式 (20.7) は測地線のみたすべき式であるが，単に必要条件にすぎない．しかし以下においては，(20.7) をみたす曲線を測地線ということにしよう．この方程式が平面上の直線の方程式 (9.5) と形式的にはまったく同じであることに注意すべきである．



2-11 図

上に考えた C_ε がすべて測地線であれば，(20.4) は

$$I'(\varepsilon)=\Big[L_{(i)}u^i\Big]_{t_1}^{t_2}$$

となる．さらにすべての C_ε が同じ点 P_1 から出発して同じ長さをもつとすれば，上式は

$$L_{(i)}\,u^i|_{t=t_2}=0$$

となる．これは

$$g_{ik}\frac{dx^k}{ds}u^i=0$$

にほかならないから

定 理 同じ点から出る測地線上に同じ長さを切り取れば，終点の軌跡はこれらの測地線に垂直である (2-11 図).

これは平面上の円と半径との関係に似ている．この軌跡を，P_1 を中心とする**距離円**という．

§21. 特殊な座標

（I） 最初は前節の話を続けよう．測地線の微分方程式（20.7）は2階であるから，初期条件

$$\text{ある点O：} \qquad x^i = x_0^i,$$

$$\text{Oから出る方向：} \qquad \frac{dx^i}{ds} = v_0^i$$

を与えれば一意に解が定まる．すなわち，任意の点Oを通り，任意の方向 v_0^i に測地線が引ける．そこで点Oからすべての方向に測地線を引き，Oから測ったその弧長を u とする．同じ u に対応する点の軌跡は距離円であり，距離円上のあるパラメーターを v とする．Oの近くの点はちょうど1組の (u, v) で表わされるから，(u, v) は点Oの近くで成り立つ座標である．（点Oは $u=0$ で与えられて v は任意であるから，Oは極座標系の極のようである）．これに関して第1基本式を

$$ds^2 = g_{11}du^2 + 2g_{12}dudv + g_{22}dv^2$$

とする．$v=$ 定数という曲線は点Oから出る測地線で

$$ds^2 = g_{11}du^2$$

であるが，$u=s$ だから $g_{11}=1$ である．さらに前節の定理の垂直性から $g_{12}=0$. よって

$$ds^2 = du^2 + G^2dv^2. \tag{21.1}$$

ここに G は一般に u, v の関数である．この座標 (u, v) を，点Oを極とする**測地的極座標**という．平面上の極座標 (r, θ) については，平面の ds は

$$ds^2 = dr^2 + r^2d\theta^2$$

である．(21.1) においては v は距離円上のあるパラメーターであり，角 θ のような意味はない．

(21.1) のような g_{ij} については，$\Gamma_j{}^i{}_k$ は

$$\Gamma_1{}^2{}_2=\frac{1}{G}\frac{\partial G}{\partial u},\qquad \Gamma_2{}^1{}_2=-G\frac{\partial G}{\partial u},\qquad \Gamma_2{}^2{}_2=\frac{1}{G}\frac{\partial G}{\partial v}.$$

したがって

$$R_{1212}=-G\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}.$$

これと (16.2′) より，曲率 K は

$$K=-\frac{1}{G}\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}$$

となる．

応用として，K を定数とする．上式は

$$\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}=-KG$$

であるから，K の正負，また 0 にしたがって，次のように取扱われる．

$K=\dfrac{1}{a^2}$ $(a>0)$ とすれば

$$G=A\sin\frac{u}{a}+B\cos\frac{u}{a}.$$

ここに A, B は v の関数である．$u=0$ とおけば，$G(0, v)=B$ であるが，$u=0$ のとき，任意の v に対して $(0, v)$ は極 O を表わし，$ds^2=0$ であるから $G(0, v)=0$, よって $B=0$ であり，

$$G=A(v)\sin\frac{u}{a}$$

となる．そこで $A(v)dv=df$ という v の関数 f をあらためて v ととれば，(21.1) は

(21.2) $$ds^2=du^2+\sin^2\frac{u}{a}\,dv^2$$

となる．

同様に $K=-\dfrac{1}{a^2}$ $(a>0)$ のときは

(21.3)
$$ds^2 = du^2 + \sinh^2 \frac{u}{a} dv^2.$$

最後に $K=0$ とすれば

(21.4)
$$ds^2 = du^2 + u^2 dv^2$$

と，平面上の極座標 (r, θ) におけると同様になる．

たとえば (21.2) をみよう．これは $K=\frac{1}{a^2}$ であるすべての曲面についてえられた式であり，したがってこのような曲面はすべて同じ第1基本式をもつ．このように，同じ第1基本式をもつ2つの曲面は**等長的** (isometric) であるという(§18 参照)．ゆえに

定 理 同じ定数曲率をもつ2つの曲面は等長的である．

等長的である2つの曲面の intrinsic な性質はすべて一致する．§19 からわかるように，$K=\frac{1}{a^2}$ である曲面はすべて半径 a の球面と，また $K=-\frac{1}{a^2}$ である曲面はすべて半径 a の擬球と等長的である．

(**II**) 一般の第1基本式は (11.5) のように書き直された．それをさらに

$$ds^2 = \left\{\sqrt{g_{11}}\left(dx^1 + \frac{g_{12}}{g_{11}} dx^2\right) + i\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_{11}}} dx^2\right\}$$
$$\times \left\{\sqrt{g_{11}}\left(dx^1 + \frac{g_{12}}{g_{11}} dx^2\right) - i\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_{11}}} dx^2\right\}$$

と書き直す．{ } の中の 2 つは複素共役であるが，どれも

$$P(x^1, x^2)dx^1 + Q(x^1, x^2)dx^2$$

という形をしている．そこで微分方程式論における積分因子 $\lambda(x^1, x^2)$ を用いて

$$\lambda(Pdx^1 + Qdx^2) = df$$

というように，適当な関数 λ を掛ければ，関数 $f(x^1, x^2)$ の全微分形に書くことができる．したがって

$$ds^2 = \frac{1}{\lambda\bar{\lambda}} df d\bar{f}$$

となる．バーは複素共役を意味する．そこで

$$f = u + iv, \qquad \lambda = p + iq$$

というように実部と虚部に分ければ

$$ds^2 = \frac{1}{p^2 + q^2}(du^2 + dv^2)$$

となり，結局，第1基本式は常に

$$ds^2 = C^2(u, v)(du^2 + dv^2), \qquad C > 0 \tag{21.5}$$

と書けることがわかる．座標 (u, v) を**等温座標** (isothermal coordinates) という．この座標では，媒介曲線の接ベクトル $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ が

$$|\boldsymbol{e}_1| = |\boldsymbol{e}_2| = C(u, v), \qquad \boldsymbol{e}_1 \perp \boldsymbol{e}_2$$

をみたすのである．

(21.5) の右辺に含まれる式

$${ds_0}^2 = du^2 + dv^2$$

は平面の直交座標 (u, v) に関する第1基本式である．さらに，この曲面の2つの接ベクトル

$$\boldsymbol{p} = p^i \boldsymbol{e}_i, \qquad \boldsymbol{q} = q^i \boldsymbol{e}_i$$

のなす角 θ は

$$\cos\theta = \frac{g_{ij}p^i q^j}{\sqrt{g_{ij}p^i p^j}\sqrt{g_{ij}q^i q^j}} = \frac{C^2(p^1 q^1 + p^2 q^2)}{\sqrt{C^2\{(p^1)^2 + (p^2)^2\}}\sqrt{C^2\{(q^1)^2 + (q^2)^2\}}}.$$

ここで C^2 が分母，分子で消えてしまって，${ds_0}^2$ について考えたものと同じになる．すなわち，成分が (p^i), (q^i) という平面上の2つのベクトル $\boldsymbol{p}_0$, $\boldsymbol{q}_0$ のなす角もまた同じ θ である．このようなことを，

定理 どのような曲面も平面と等角的 (conformal) である．

という．したがって，任意の2つの曲面はまた等角的である．

平面状のゴムの薄い膜を考えよう．どのような曲面についても，その適当に小さな部分に，このゴム膜をうまく伸ばしたり縮めたりしてピッタリ張り合せることができるだろう．伸び縮みの仕方は (21.5) の関数 $C(u, v)$ が決めるだろう．これが上の定理の直観的証明である．

3 リーマン計量

曲面の理論からその第1基本式のみによって構成されるものだけを抜出し，その次元を2から一般の自然数へと拡張したものがいわゆるリーマン幾何学である． しかし，1854 年の Riemann の論文はそれだけの意義しかもたないものではない．まず，微分可能多様体という，数学的空間が物理的に提示される．その空間における計量の概念がやや哲学的に展開される．最も簡単な計量として，いわゆるリーマン計量が特にとりあげられたにすぎない． それが曲面の第1基本式の一般化である． したがって Riemann 自身の夢はリーマン幾何学を越えて飛躍していたといえる．このことは第4章でまた述べることにする．この第3章では，リーマン幾何学から，著者個人の見解で特に興味があり，しかも前後の関係で書く必要のある部分だけをまとめてみることにしよう．

§ 22. Riemann の就任講演から

前章で述べた曲面の理論は，第1基本式

$$ds^2=\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}(x)dx^i dx^j$$

と第2基本式 $b_{ij}(x)dx^i dx^j$ とから構成された．このことは §15 の基本定理によって明らかである．すなわち，g_{ij} と b_{ij} はガウス，コダッチの公式をみたさなければならないが，これらの量によって曲面は（運動を除けば）ただ1つ決定するから，その曲面のあらゆる性質がこれらの量のみによって定まる．曲面の幾何的量はこれらの量から数学的手段によって導かれる．

第1基本量は3次元ユークリッド空間の計量を曲面へ持ちこんだもので，曲面の形はあまり本質的ではなく，形が異なっても等長的に同じとみられるものがたくさんあった．

第2基本量は法線のふるまいを記述し，重要なものであるが，ガウスの大定理（§ 16）により，曲率は第2基本量を用いずに表わすことができる．しかも

曲面論においては第1基本量だけで記述されるものが多くある．もう一度第2章の序文における Poincaré の蟻を登場させれば，曲面上に住んでいる蟻の幾何学は第1基本量だけから構成されるのである．

この蟻の幾何学を一般次元へ拡張したものが，いわゆるリーマン幾何学である．単に次元数を一般にするだけのことなら，現代の数学者にとっては何でもないことであるが， Riemann の思想はただそれだけではなかった．そこで，病弱でわずか40才で亡くなった G.F.B. Riemann (1826〜1866) の28才の時の就任講演 (Habilitationsvorlesung, 大学教員の資格をとるための講演) の一部をそのまま引用してみよう．(矢野健太郎訳：現代数学の系譜 10 (共立出版) による.)

n 重に拡がった多様体の概念が構成され，そのなかでの位置の決定が n 個の量の決定に還元されることであるというその本質的特徴がわかったいま，そのつぎにくるのは，上に述べた問題の第2番目のものとして，このような多様体に対して可能な量的関係の研究と，この量的関係の決定に対して十分な条件の研究とである．この量的関係は，抽象的な量概念のなかだけで研究され，したがって公式を用いてだけ表現される．しかし適当な仮定のもとにおいては，この量的関係は，幾何学的な表現が可能であるような関係に分解され，したがって計算の結果を幾何学的に表現することが可能になる．したがって，確実な基礎を得るために式を用いた抽象的考察をさけることはできないが，結果自身は，幾何学的な着物をきせて表現することができる．この両方とも，その基礎は，Gauss の曲面についての有名な論文のなかに含まれている．

量の決定は，量の位置に対する独立性を必要とし，これは種々の多くの方法で可能である．それは私がこれから研究しようと思うものであるが，ここですぐ気づく仮定はおそらく，曲線の長さはその位置に無関係であり，したがってすべての曲線は任意の曲線を用いて測り得るということであろう．位置の決定が量の決定に還元され，したがって与えられた n 重に拡がった多様体の点の位置が，n 個の変数 x_1, x_2, x_3, $\cdots$ などと x_n まで

によって表現されるから，1つの曲線を定めることは，量 x を1つの変数の関数として与えることと一致する．そうすると問題は，曲線の長さに対して1つの数学的表現を与えることになり，そのためには，量 x が単位で表わし得るものであると考えなければならない．私はこの問題をある制限のもとだけで取り扱い，－量 x の増分である－量 dx の間の関係が連続的に変わる場合だけを考えることにしよう．この場合，曲線を要素に分解して考えることができ，その各要素のなかでは，量 dx の間の関係は一定であると見なしてもさしつかえない．したがって問題は，すべての点に対して，その点からでる線素 ds に対する，量 x と量 dx を含む一般的な表現を求める問題に帰着される．さて私は第2番目に，線素の長さは，2次の無限小を無視すれば，すべての点に同じ無限小変位を与えても不変に保たれるということを仮定する．ここにはすでに，すべての量 dx を同じ割合で大きくすれば，線素もまたそれと同じ割合で変化するということが含まれている．この仮定のもとで，**線素は量 dx の1次の任意の斉次関数となり，それは，すべての量 dx の符号を同時にかえても不変である．**そしてそのなかでの任意の定数は量 x の連続関数である．最も簡単な場合を見いだすために，私はまず，線素の始点からいつも等距離にある点の全体が作る，$n-1$ 重に拡がった多様体に対する表現を求める．すなわち私は，これらの多様体を互いに区別する場所の連続関数を求める．この関数は，始点からすべての方向に向かってつねに増加するか，または減少するものでなければならないが，私はここではすべての方向へ増加していくものであると仮定する．したがってこれは始点で最小をもっている．したがってその第1次，および第2次微分係数が有限であれば，1次微分はゼロとなり，2次微分は負にならない．私はこれがいつでも正であると仮定する．この2次微分形式は，ds が一定ならば一定であり，dx，したがって ds がすべて同じ割合で変化すれば，その平方の割合で変化する．したがってそれは（定数）$\times ds^2$ に等しく，したがって **ds は，量 dx の正値2次型式の平方根に等しくなる．**ここに係数は量 x

の連続関数である．空間においては，点の位置を直交座標で表わせば，$ds = \sqrt{\sum(dx)^2}$ である．したがって空間はこの最も簡単な場合に含まれている．そのつぎに簡単な場合は，その線素が 4 次の微分型式の 4 乗根として表わされる多様体であろう．このようなさらに一般な場合の研究も，本質的には前と異なる原理は必要としないであろうが，かなりめんどうな上に，結果を幾何学に表現することができないから，空間の研究に新しい光を与えることはあまりないであろう．そこで私は，線素が 2 次微分型式の平方根で表わされるような多様体だけを考えることにしよう．

以上が Riemann の論文のほんの一部である．現代のわれわれにとっては大変わかりにくい．深い考察をしていることは理解されるが，何だか文句が多すぎて主旨がピンとこない．

28 才の Riemann が就任講演をしたときに，すでに 77 才であった老 Gauss（翌年亡くなった）も出席していた．少くとも数学にかけてはひどく傲慢そうで物に動じなかったこの巨人も，このときばかりは友人の物理学者 Weber に，若い後輩の思想がいかに深遠なものであるかを興奮してしゃべり続けたそうである．老人にとっては，自分の生涯をかけてやってきたことを継いでくれる人，さらには自分を越えてくれる人を見出しえたこと以上に大きな喜びはないのであろう．97 才のオルガニスト J. A. Reincken と 35 才の J. S. Bach の出会いもそうであったようである．老いた後白河法皇が自分を越えて今様の芸を伝えてくれる若者がいないことを慨いていたのももっともである．Riemann の講演の意義については，近藤洋逸著：新幾何学思想史（三一書房）を参照されたい．

§ 23. 微分可能多様体

Riemann が“n 重に拡がった多様体”と名づけたものは，現在 n 次元多様体といわれ，リーマン幾何学の展開される多様体はさらに微分可能構造をもっている．これを正確に理解するには位相の概念が必要である．しかし以下においては，リーマン空間の大域的性質を研究対象としないので，位相のことはとやかくいわずにおく．

第 1 章で，平面上の一般の座標系は，平面 π のある部分 D から，R^2 の中への 1 対 1 の写像であった．R^2 とは，2 つの実数の順序づけられた組（x, y）全体の集合であった．そこで，n 個の実数の順序のついた組（x^i）＝（x^1,

$x^2, \cdots, x^n$) の全体の集合を R^n と表わし，**n 次元数空間**という．R^n は n 次元多様体のモデルである．それは以下の意味においてである．

ある集合 M を考え，その要素を点とよぶことにする．M のある部分集合 U について，U から R^n の開領域 D の上への 1 対 1 の写像

$$u : U(\subset M) \to D(\subset R^n),$$

があるとき，組 (U, u) を M 上の**n 次元の地図**という．

R^n の開領域 D とは，たとえば，半径 1 の球の内部

$$\{(x^1, \cdots, x^n) \mid (x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2 < 1\}$$

のように，周囲を含まない R^n の部分集合のことであるが，正確には位相の知識が必要である．地図の定義における D をこの球の内部としておいてもよい．

地図 (U, u) によって，U の点 p と D の要素

$$u(\mathrm{p}) = (x^1, x^2, \cdots, x^n)$$

との間に 1 対 1 の対応がつく．要素 $(x^i) = (x^1, x^2, \cdots, x^n)$ を，(U, u) による p の**座標**という．U はこの座標の定義域である．この座標の概念は曲面上のそれの一般化であることはいうまでもない．

集合 M の 2 つの n 次元地図 (U, u), $(\bar{U}, \bar{u})$ において，$U \cap \bar{U}$ が空でなければ，点 $\mathrm{p} \in U \cap \bar{U}$ の 2 つの座標 (x^i), $(\bar{x}^i)$ がえられる．すなわち

$$u(\mathrm{p}) = (x^i) \in D, \qquad \bar{u}(\mathrm{p}) = (\bar{x}^i) \in \bar{D}.$$

したがって $D_1 = u(U \cap \bar{U})$, $D_2 = \bar{u}(U \cap \bar{U})$ という R^n の 2 つの領域 D_1, D_2 の間に 1 対 1 の対応

$$\bar{u}\cdot u^{-1} : D_1 \to D_2$$

がえられる．ここに $\bar{u}\cdot u^{-1}$ は，u の逆 u^{-1} に $\bar{u}$ を続けて行った合成写像である．D_1, D_2 は R^n の領域であるから，$\bar{u}\cdot u^{-1}$ は n 個の実変数の n 個の実関数

$$\text{(23.1)} \qquad \bar{x}^i = f^i(x^1, \cdots, x^n), \qquad i = 1, \cdots, n$$

で表わされる．ここに (x^i), $(\bar{x}^i)$ はそれぞれ同じ点 $\mathrm{p} \in U \cap \bar{U}$ の (U, u), $(\bar{U}, \bar{u})$ による座標である．もし f^i がクラス C^r の関数（r 次偏微係数まであって，それらが連続）であるとき，2 つの地図 (U, u), $(\bar{U}, \bar{u})$ は **C^r-related**

であるという．$U \cap \bar{U}$ が空のときも C^r-related であるという．

さて，集合 M に次の2条件をみたす n 次元地図の集り $\{(U, u)\}$ があるとき，M は**クラス C^r の n 次元微分可能多様体**であるといい，$\{(U, u)\}$ を M の**微分可能構造**という．

（i） $\{(U, u)\}$ の定義域 U の和は M と一致する．

（ii） $\{(U, u)\}$ のどの2つの地図も C^r-related である．

これらの条件の意味は次のようである．（i）は単に M のどの点にも座標が与えられているということである．（ii）を考えよう．$r=0$ であれば，(23.1) の関数が単に連続であることを意味するから，微分するわけにいかない．単に位相的である．$r \geqq 1$ であれば，ヤコビアンである n 次の行列

$$J_x = \left(\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i}\right)$$

がえられ，(U, u) と $(\bar{U}, \bar{u})$ の役割を交換して

$$\bar{J}_x = \left(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a}\right)$$

もえられる．

$$\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^b} = \delta^a_b$$

であるから，これらヤコビアンからできる行列式は 0 でない(§ 3 の写像定理参照)．

さて，一般に n 変数の実関数 $f(x^1, \cdots, x^n)$ は，n 次元微分可能多様体のモデルというべき R^n 上の実数値をとる関数

$$f : D \subset R^n \to R^1 \ (=R)$$

である．一般の n 次元微分可能多様体 M 上の実関数 f を，写像

$$f : D \subset M \to R$$

と定義する．D は定義域である．この f を n 変数で表わすために，次のように考えよう．M の微分可能構造 $\{(U, u)\}$ の1つの地図 (U, u) で，$U \cap D$ が空でないものをとれば，

$$f^* = f \cdot u^{-1} : u(U \cap D) \subset R^n \to R$$

という合成写像 f^* がえられよう．f^* は R^n 上の関数，すなわちふつうの n 変数の関数 $f^*(x^1, \cdots, x^n)$ であり，点 $\mathrm{p} \in U \cap D$ の (U, u) に関する座標を (x^i) とすれば，

$$f^*(x^1, \cdots, x^n) = f(\mathrm{p})$$

である．この f^* を，(U, u) による f の表現ということにしよう．もう 1 つの地図 $(\bar{U}, \bar{u})$ による f の表現 $\bar{f}^*$ がえられたとしよう．

$$\bar{f}^*(\bar{x}^1, \cdots, \bar{x}^n) = f(\mathrm{p})$$

であるが，(23.1) により

$$\bar{f}^*(f^1, \cdots, f^n) = f^*$$

がえられる．仮定により，$f^1, \cdots, f^n$ はクラス C^r であるから，上式により，$\bar{f}^*$ がクラス C^r であれば f^* もそうであり，(U, u) と $(\bar{U}, \bar{u})$ の役割を交換して，逆も成り立つ．そこで f は，1 つの表現 f^* がクラス C^r であるとき，クラス C^r であると定義しよう．したがって，f のクラス C^r 性は条件 (ii) によって，表現のいかんによらないわけであり，f 自身の性質であるといえる．

幾何学は，それを研究するために用いる道具（座標）によらない，空間自身，またはその中の図形の性質を研究するものであるから，座標の取り方によって変ってしまう結果は無意味なのである．

次には曲面の接ベクトルの概念を一般化しよう．曲面の接ベクトルは (11.6) のように

$$\boldsymbol{u} = u^i \boldsymbol{e}_i$$

と表わされた．これら $\boldsymbol{e}_i$ は外枠である 3 次元ユークリッド空間があって初めて考えられるもので，われわれの M では考えられない．曲面上の蟻が外枠を認識できないように，われわれは Riemann と共に M 上の蟻なのであり，便利な外枠がたとえあろうとも認識できず，したがって利用するわけにゆかない．そこでベクトルの見方をまったく変更せざるをえない．その手段が，ふつうの偏微分計算にでてくる，ある方向への偏微係数という概念である．ふつうの (x, y) 平面上の 2 変数の関数 $f(x, y)$ について，

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta$$

を，方向 $\boldsymbol{e}(\cos\theta, \sin\theta)$ への偏微係数というが，$\boldsymbol{e}$ は単位ベクトルでなくてもよい．曲面 S の接ベクトル $\boldsymbol{u}(u^i)$ と，S 上の関数 f について，

$$\sum_{i=1}^{2} u^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \tag{23.2}$$

を，f の $\boldsymbol{u}$ 方向の偏微係数といえば，$\boldsymbol{u}$ は偏微分作用素

$$\boldsymbol{u}=u^i\frac{\partial}{\partial x^i}$$

とみられ，記号 $\boldsymbol{u}(f)$ が (23.2) を表わすのに用いられよう．

このようにして，M の地図 (U, u) を用いて，点 $\mathrm{p}(x^i)\in U$ における M の（接）**ベクトル** $\boldsymbol{u}$ を，偏微分作用素

$$\boldsymbol{u}=u^i\frac{\partial}{\partial x^i} \tag{23.3}$$

によって定義する．(u^i) を (U, u) に関する $\boldsymbol{u}$ の成分という．別の地図 $(\bar{U}, \bar{u})$ を用いて

$$\boldsymbol{u}=\bar{u}^a\frac{\partial}{\partial \bar{x}^a}$$

と表わせば，

$$\bar{u}^a\frac{\partial}{\partial \bar{x}^a}=u^i\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial \bar{x}^a}$$

から

$$\bar{u}^a=u^i\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i}$$

がえられ，これは $(1,0)$-テンソルの定義式（(8.4) の $r=1, s=0$）にほかならない．こうして，テンソルの定義 (8.4) は，そこで (x^i), $(\bar{x}^a)$ を M 上の座標とみて，まったく変更なしに，微分可能多様体に持ちこまれるのである．

したがって n 個の作用素 $\partial/\partial x^1, \cdots, \partial/\partial x^n$ は n 個の接ベクトルであり，たとえば

$$\frac{\partial}{\partial x^1}=1\cdot\frac{\partial}{\partial x^1}+0\cdot\frac{\partial}{\partial x^2}+\cdots+0\cdot\frac{\partial}{\partial x^n}.$$

(23.2) により，点 p における任意の接ベクトルはこれら n 個の 1 次結合である．しかも，これらは 1 次独立である．というのは，もし，1 次従属，したがって

$$v^1\frac{\partial}{\partial x^1}+\cdots+v^n\frac{\partial}{\partial x^n}=0$$

という実数 $v^1, \cdots, v^n$ があれば，右辺の 0 は，どんな関数を微分しても 0 という意味：

$$v^1\frac{\partial f^*}{\partial x^1}+\cdots+v^n\frac{\partial f^*}{\partial x^n}=0.$$

ここに f^* は M 上の微分可能な関数 f の座標による表現である．したがって，座標による表現が x^1 という関数，すなわち，点にその (U, u) に関する第 1 座標を対応させる関数を考えれば，

$$v^1\frac{\partial x^1}{\partial x^1}+\cdots+v^n\frac{\partial x^1}{\partial x^n}=v^1=0.$$

同様にすべての $v^i=0$ となる．

したがって，点 p における接ベクトルの全体 M_p は，1 つの基底 $(\partial/\partial x^1, \cdots, \partial/\partial x^n)$ をもつ n 次元ベクトル空間である．この M_p を，点 p における M の**接空間**という．接するという言葉の直観的意味は失われていることに注意しよう．

§ 24. 接　続

n 次元微分可能多様体 M のある領域 D の各点に接ベクトル $\boldsymbol{u}$ が与えられたとき，これを**接ベクトル野**という．テンソル野も同様に定義される．1 つの n 次元地図 (U, u) をとれば，領域 $D\cap U$ では，ベクトル野 $\boldsymbol{u}$ の成分 u^i は，点の座標 $(x^1, \cdots, x^n)$ の関数として表わされるから，成分が微分可能であれば，偏微係数

$$\frac{\partial u^i}{\partial x^j}$$

が作れる．しかし，第1章でも第2章でも，一般に単なる偏微係数はテンソル性がなく，幾何的に無意味であることがわかっている．しかしこれまでの章では，g_{ij} から作られたクリストフェルの記号 $\Gamma_j{}^i{}_k$ で修正して，共変微係数というテンソル性をもつものが作れたのである．しかし，単なる M ではまだ g_{ij} が与えられていないので，これまでのようなことは考えられない．リーマン計量はそれを可能にするのにうまく役立つのであるが，ここではまだリーマン計量ぬきで考える．

§ 13 で (13.5) がえられたが， これはまったく $\Gamma_j{}^i{}_k$ の変換式 (13.4) によるものであることがわかる．したがって g_{ij} から作られたものでなくても，M の各地図 $(U,\ u)$ において $\Gamma_j{}^i{}_k(x)$ が与えられ， 2 つの地図 $(U,\ u)$, $(\bar{U},\ \bar{u})$ に関して関係式

(24.1) $$\bar{\Gamma}_a{}^c{}_b\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^c}=\Gamma_i{}^k{}_j\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^b}+\frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar{x}^a\partial \bar{x}^b}$$

をみたすもの（テンソルではない）があれば，(13.5) のように共変微係数が定義される．たとえば (1,1)－テンソル野 $V_j{}^i$ については，それから

(24.2) $$V_j{}^i{}_{:k}=\frac{\partial V_j{}^i}{\partial x^k}+V_j{}^h\Gamma_h{}^i{}_k-V_h{}^i\Gamma_j{}^h{}_k$$

という (1,2)－テンソルがえられる．

クリストフェルの記号 $\Gamma_j{}^i{}_k$ は $j,\ k$ について対称であったが，上の $\Gamma_j{}^i{}_k$ は対称でなくてもよい．ゆえに

(24.3) $$T_j{}^i{}_k=\Gamma_j{}^i{}_k-\Gamma_k{}^i{}_j$$

は 0 でなくてもよい．(24.1) により， この $T_j{}^i{}_k$ は (1,2)－テンソルの成分である．このテンソルを**捩率** (torsion) **テンソル**という．そうして，このような $\Gamma_j{}^i{}_k$ が与えられたとき，多様体 M は**接続**が与えられたといい，$\Gamma_j{}^i{}_k$ を**接続係数**(または接続径数）という．

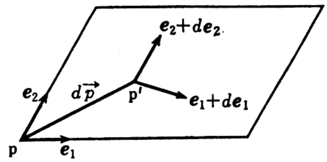
接続係数をもっと幾何的に導入したのは E. Cartan である．それを説明する前に第2章の議論を思い出そう．そこでは基本的なガウスの方程式 (12.3) がある．それは

$$de_i = \Gamma_i{}^k{}_j dx^j e_k + b_{ij} dx^j n$$

と書ける．n 方向を無視し，上式と（15.1），すなわち

$$d\vec{p} = e_i dx^i$$

（$\vec{p}$ は（15.1）のベクトル x のこと）を併せ考えれば，次のようになる（3-1 図）．



3-1 図

曲面 S 上の点 p(x), p'$(x+dx)$ における接平面を π, π' として，π' を次のように π に重ね合わそう．p' を

$$d\vec{p} = e_i dx^i \tag{24.4}$$

によって，すなわち p から出るベクトル $d\vec{p}$ の終点にもってくる．そうして $e_i(x+dx)$ を

$$de_i = \Gamma_i{}^k{}_j dx^j e_k \tag{24.5}$$

によって，すなわち，p' をもってきた点から出るベクトル $e_i + de_i$ にもってくる．一般の点については線形拡張する．すなわち，π' 上の点 q' は

$$\overrightarrow{\mathrm{p'q'}} = u^i e_i(x+dx)$$

と表わされるから，p から出るベクトル

$$d\vec{p} + u^i(e_i + de_i) \tag{24.6}$$

の終点にもってくる．こうして π' 上のすべての点が π 上にもってこられ，写像 $\pi' \to \pi$ がえられた．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{p'q'}}$ はベクトル $u^i(e_i + de_i)$ に移されたが，その長さは

$$\begin{aligned} &u^i u^j (e_i + de_i)(e_j + de_j) \\ &= u^i u^j (e_i + \Gamma_i{}^k{}_h dx^h e_k)(e_j + \Gamma_j{}^m{}_l dx^l e_m) \\ &= u^i u^j (g_{ij} + \Gamma_j{}^m{}_l g_{im} dx^l + \Gamma_i{}^k{}_h g_{jk} dx^h + \cdots). \end{aligned}$$

（13.6）により

$$= u^i u^j \left(g_{ij} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h} dx^h + \cdots \right).$$

これは dx^i の 2 次以上の無限小を無視すれば $u^i u^j g_{ij}(x+dx)$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{p'q'}}$

の長さに等しい．したがってこのような近似において，写像 $\pi' \to \pi$ は平面 π' をそのまま（合同変換によって）π 上に重ね合せたことになる．

上のことをもっと正確に述べ，n 次元微分可能多様体 M の場合へ拡張しよう．すなわち，M 上の各地図 (U, u) の U 上に，n^3 個の関数 $\Gamma_j{}^i{}_k(x)$ が与えられて，変換式 (24.1) をみたすとする．M 上の曲線 C をとる．これは写像

$$C : [a, b] \to M$$

と考えられ，$t \in [a, b]$ に対して $C(t) = x^i(t)$ とする．C にそって連立常微分方程式

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e_i \frac{dx^i}{dt}, \tag{24.7}$$

$$\frac{de_i}{dt} = \Gamma_i{}^k{}_j(x) e_k \frac{dx^j}{dt} \tag{24.8}$$

を考えよう．C にそってという意味は，右辺の x がすべて C 上の $x(t)$ であるということである．そこで n 次元ユークリッド空間 E^n の任意の点 p_0 と p_0 におけるフレーム $\{\mathrm{p}_0; e_i{}^0\}$ をとれば，これを初期条件として，(24.7), (24.8) の解 $\vec{p}(t)$, $e_i(t)$ がえられる．これは p_0 から出るベクトル $\vec{p}(t)$ の終点 $\mathrm{P}(t)$ の軌跡である E^n の曲線 γ と，γ にそって定義されたフレーム $\{\mathrm{P}(t); e_i(t)\}$ を与える．γ を，この接続による C の E^n の中への**展開**という．

C にそって与えられた M の接ベクトル野 u^i に対して，γ にそって E^n のベクトル野 $\boldsymbol{u}(t) = u^i(t) e_i(t)$ がえられる．こうして，γ にそう E^n のベクトルの幾何学を，C にそう M のベクトル野について持ちこむことができる．たとえば，$\boldsymbol{u}(t)$ が E^n の意味で平行であるとき，u^i は C にそって**平行移動**しているという．これを調べよう．(24.8) により

$$\frac{d\boldsymbol{u}(t)}{dt} = \frac{du^i}{dt} e_i + u^i \frac{de_i}{dt}$$

$$= \frac{du^i}{dt} e_i + u^i \Gamma_i{}^k{}_j e_k \frac{dx^j}{dt}$$

$$= \frac{\delta u^i}{\delta t} e_i,$$

ここに，(9.4) のように，

$$\frac{\delta u^i}{\delta t} = u^i{}_{;j} \frac{dx^j}{dt}$$

である．したがって，M のベクトル野 u^i が任意の曲線にそって平行移動している，すなわち，**平行ベクトル野**であるというための条件は，$u^i{}_{;j}=0$ である．

変換式 (24.1) は，C の展開 γ が，用いた座標 x^i に無関係に定まるための条件であることは明らかであろう．

上の展開という概念は，2次元の場合には，曲面 S 上の曲線 C の平面上への展開 γ を与え，こうして曲面の接ベクトル野の**レヴィ・チビタの平行移動**という概念がえられる．これを直観的にいえば次のようである．

C 上に点 $\mathrm{p}_0, \mathrm{p}_1, \cdots, \mathrm{p}_{n-1}, \mathrm{p}_n$ をとる．点 p_n と p_n における接ベクトル $\boldsymbol{u}_n$ を，p_{n-1} における接平面 π_{n-1} 上へ正射影して，点 p_n' とベクトル $\boldsymbol{u}_n'$ がえられる．次に点 p_{n-1} と p_{n-1} における接ベクトル $\boldsymbol{u}_{n-1}$，および $\mathrm{p}_n', \boldsymbol{u}_n'$ を，点 p_{n-2} における接平面上へ正射影して，点 p'_{n-1}，ベクトル $\boldsymbol{u}'_{n-1}$，さらに点 p_n''，ベクトル $\boldsymbol{u}_n''$ がえられる．この操作をくり返して，最後に，点 p_0 における接平面 π_0 上に，$\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \cdots, \mathrm{p}_n$ の像 $\mathrm{q}_1, \mathrm{q}_2, \cdots, \mathrm{q}_n$ と，それらの点から出るベクトルがえられる．こうして折線 $\mathrm{p}_0\mathrm{q}_1\mathrm{q}_2\cdots\mathrm{q}_n$ がえられ，分割を限りなく細かくしたときのこの折線の極限が C の展開 γ である．ベクトルの像の極限として，γ にそう平面 π_0 上のベクトル野もえられ，これによって平行性が定義される．

Tullio Levi-Civita (1873～1941) はイタリー人．§7 で述べた G. Ricci の弟子である．師と共に 1900 年頃に力学へ共変微分法を応用して成果をあげたが，1917 年に上記のレヴィ・チビタの平行移動を発見し，Riemann 以来，単に 2 次微分式 $ds^2=g_{ij}dx^i dx^j$ の微分不変式論にすぎなかったといってもよいリーマン幾何学に，幾何学の衣装を着せるのに成功した．このことは，1916 年に発表された Einstein の一般相対性理論と共に，リーマン幾何学発展に非常に大きい推進力を与えた．

以上では，多様体 M にまだ計量が与えられていないので，初めに述べた

“写像 $\pi' \to \pi$ は重ね合せである” ということは一般化されない．リーマン幾何学を “計量＋接続” という構造の幾何学であるととらえるには，Cartan の巨手を待たなければならなかった．次節でこれを取扱う．

Élie Cartan (1869～1951) はフランスの人．その数学への寄与は測り知れないものがあるが，微分幾何学だけについていえば，1923 年頃からアフィン接続，共形接続，射影接続など，多くのユニークな概念を微分可能多様体の幾何学へ導入し，現在のすべての微分幾何学でさえ，Cartan の考えた枠内にあるということができよう．矢野健太郎著：接続の幾何学（森北出版）．

§ 25. リーマン接続

§ 22 で引用したように，Riemann 自身は，n 次元微分可能多様体上に

(25.1) $$ds^2 = g_{ij}(x)dx^i dx^j$$

という計量を与えて研究することを提唱した．これが計量であるという意味は，M 上の曲線 $x^i = x^i(t)$ の点 $t = t_0$ から $t = t_1$ までの**弧長** s が積分

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_{ij}(x(t)) \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}}\, dt$$

で与えられるという意味である．これには，その幾何的意味により，次の条件が考えられるべきである．

上述のことは，座標 (x^i) が成り立つ領域 U をとって，U の中にえがかれた曲線について述べたのであるが，別の座標 $(\bar{x}^a)$ をとって考えても同じ s を与えるとすべきであろう．したがって

$$\bar{g}_{ab} d\bar{x}^a d\bar{x}^b = g_{ij} dx^i dx^j$$

からすぐに

$$\bar{g}_{ab} = g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^b}$$

がえられ，g_{ij} は $(0,2)$-テンソル場であることがえられる．このテンソルを**基本テンソル**という．

さらに (25.1) により，n 変数 $u^1, \cdots, u^n$ の 2 次型式

$$g_{ij}(x) u^i u^j$$

は，考えうる (x^i) に対していつも正定値（§ 11 参照）である．すなわち，

$(u^1, \cdots, u^n) \neq (0, \cdots, 0)$ という任意の u^i に対して，上式は常に正の値をとらなければならない．

このような正定値2次微分型式 (25.1) によって計量が与えられた M の幾何学を**リーマン幾何学**というのである．計量がこのように与えられることによって，さらに幾何的な量が，曲面論をみならうことによって与えられる．たとえば，点 (x^i) において2つのベクトル $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ が与えられたとき，その成分 (u^i), (v^i) を用いてえられる

$$\boldsymbol{uv} = g_{ij}(x)u^i v^j \tag{25.2}$$

を $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ の**内積**と定義する．したがって

$$|\boldsymbol{u}| = \sqrt{\boldsymbol{uu}} = \sqrt{g_{ij}(x)u^i u^j} \tag{25.3}$$

をベクトル $\boldsymbol{u}$ の**長さ**という．(25.1) の正定値性により，$|\boldsymbol{u}|$ は $\boldsymbol{u} \neq 0$ であれば正の値をとる．それでは

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{uv}}{|\boldsymbol{u}|\cdot|\boldsymbol{v}|} \tag{25.4}$$

という θ を $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ のなす**角**と定義すべきであろうが，これは可能かどうか．このためには，成分が $u^i + kv^i$ というベクトル $\boldsymbol{u} + k\boldsymbol{v}$ を考えて，

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{u} + k\boldsymbol{v}|^2 &= g_{ij}(x)(u^i + kv^i)(u^j + kv^j) \\ &= |\boldsymbol{v}|^2 k^2 + 2(\boldsymbol{uv})k + |\boldsymbol{u}|^2. \end{aligned}$$

これは任意の k に対して $\geqq 0$ であると仮定されているから

$$(\boldsymbol{uv})^2 - |\boldsymbol{u}|^2|\boldsymbol{v}|^2 \leqq 0.$$

したがって

$$-1 \leqq \frac{\boldsymbol{uv}}{|\boldsymbol{u}|\cdot|\boldsymbol{v}|} \leqq 1$$

となり，(25.4) をみたす θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ が常にちょうど1つ定まる．ゆえに (25.4) により，$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ のなす角 θ がうまく定義される．

さて，リーマン空間 M に接続係数 $\Gamma_j{}^i{}_k$ によって接続が与えられたとする．すなわち，微分可能多様体 M 上に，計量 (25.1) と (24.1) をみたす $\Gamma_j{}^i{}_k$ とが与えられたとする．曲面では，$\Gamma_j{}^i{}_k$ は g_{ij} から定まるクリストフェルの記

号であった．そこでリーマン空間 M においても，${\Gamma_j}^i{}_k$ を g_{ij} から決定することを考えよう．M 上の曲線 C を E^n へ展開するとき，$t=a$ において $e_i^0 e_j^0 = g_{ij}(x^i(a))$ として展開 γ を考える．γ 上の各点でも $e_i e_j = g_{ij}$ が成り立つであろうか．すなわち，(24.7), (24.8) の解 $e_i(t)$ は $e_i(t)e_j(t) = g_{ij}(x(t))$ をみたすであろうか．みたすとき，接続は**計量的**であるという．この条件は

$$\frac{d}{dt}(g_{ij} - e_i e_j) = 0$$

であるが，(24.8) によりこれは

$$\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - g_{hj}{\Gamma_i}^h{}_k - g_{ih}{\Gamma_j}^h{}_k\right)\frac{dx^k}{dt} = 0$$

であるが，C の任意性により

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - g_{jl}{\Gamma_i}^l{}_k - g_{il}{\Gamma_j}^l{}_k = g_{ij;k} = 0 \tag{25.5}$$

がえられる．§7 のリッチの lemma のように，g_{ij} の共変微係数は 0 であるという具合のよい条件である．

しかしこの仮定からだけでは ${\Gamma_j}^i{}_k$ は定まらない．上式は i, j について対称だから，その取り方は $n(n+1)/2$ 通りであり， したがって (25.5) は $n^2(n+1)/2$ 個の連立1次方程式であるが，未知数 ${\Gamma_j}^i{}_k$ は n^3 個もある．しかしこの接続の振率 (24.3) が 0 であるという条件を併せて考えれば， ${\Gamma_j}^i{}_k$ は本質的に $n^2(n+1)/2$ 個になるから，${\Gamma_j}^i{}_k$ は定まりそうである．(25.5) から ${\Gamma_j}^i{}_k(={\Gamma_k}^i{}_j)$ を具体的に解く方法は，§6 において (6.3) を導くのに用いたものとまったく同じで，結果は

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}\right) \tag{25.6}$$

である．ここに $\Gamma_{ijk} = g_{jh}{\Gamma_i}^h{}_k$ である．したがって行列 (g_{ij}) の逆行列 (g^{ij}) を用いて，${\Gamma_j}^i{}_k = g^{ih}\Gamma_{jhk}$ がえられる．

(g_{ij}) が正則で逆行列 (g^{ij}) があることは， ds^2 の正定値性から，行列式 $g=|g_{ij}|$ が 0 でないことがわかり，これから明らかである．

結論として，仮定

（I） 接続は計量的である： $g_{ij;k}=0$,

（II） 捩率は0である： $T_j{}^i{}_k=0$

によって，接続は計量から一意に定まった．この接続を**リーマン接続**（または**レヴィ・チビタの接続**）という．リーマン幾何学は，正確にいえば，リーマン計量とリーマン接続とが与えられた微分可能多様体の性質を研究する学問である．

ここに2つの仮定について少し注意を加えよう．（I）が計量的であるという理由は次のようである．曲線 C と，その E^n への展開 γ を考えよう．C にそって与えられたベクトル野 $\boldsymbol{u}=(u^i)$ は，§ 24 のように

$$u^i{}_{;k}\frac{dx^k}{dt}=0$$

をみたすとき，（レヴィ・チビタの）平行移動していると定義された．C にそって平行移動している2つのベクトル $\boldsymbol{u}=(u^i)$, $\boldsymbol{v}=(v^i)$ の内積を与えよう．(25.2) により

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\boldsymbol{uv})&=\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}u^iv^j+g_{ij}\frac{\partial u^i}{\partial x^k}v^j+g_{ij}u^i\frac{\partial v^j}{\partial x^k}\right)\frac{dx^k}{dt}\\&=(g_{ij;k}+\Gamma_{ijk}+\Gamma_{jik})u^iv^j\frac{dx^k}{dt}\\&\qquad+g_{ij}(u^i{}_{;k}-u^h\Gamma_h{}^i{}_k)v^j\frac{dx^k}{dt}+g_{ij}u^i(v^j{}_{;k}-v^h\Gamma_h{}^j{}_k)\frac{dx^k}{dt}\\&=(g_{ij;k}u^iv^j+g_{ij}u^i{}_{;k}v^j+g_{ij}u^iv^j{}_{;k})\frac{dx^k}{dt}.\end{aligned}$$

ゆえに（I）を用いて上式は0となり，平行移動している2つのベクトルの内積は変化しないことがわかる．これから，平行移動しているベクトルの長さも変わらず，なす角も変化しないことがわかる．

（II）は明らかであるが，$g_{ij;k}$ も $T_j{}^i{}_k$ もともにテンソルであるから，これらの仮定は座標の取り方には関係しない．いわゆる幾何的仮定であるということになる．

ds^2 の正定値性から，逆行列 (g^{ij}) がえられたので，§ 8 のように，(1,0)－テンソ

ル u^i から (0,1)-テンソル $v_i = g_{ij}u^j$ がえられるばかりでなく，(0,1)-テンソル v_i から (1,0)-テンソル $u^i = g^{ij}v_j$ を作ることができる．しかしこの正定値性は物理学の発展にともない少々具合が悪くなった．すなわち Lorentz や Minkowski が提示し，Einstein の特殊相対性理論の基礎になった計量

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2$$

は正定値ではない．$(dx, dy, dz, dt) = (0, 0, 0, dt)$ では $ds^2 = -c^2dt^2 < 0$ となり，

$$(u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2 - c^2(u^4)^2 = 0$$

をみたす $(u^1, u^2, u^3, u^4) \neq (0, 0, 0, 0)$ という成分をもつベクトルは長さが 0 になる．さらに一般相対性理論において有名な**シュバルツシルドの計量**は

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1-(2m/r)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)c^2dt^2$$

で，m, c は 0 でない定数である．その行列 (g_{ij}) は $(x^i) = (r, \theta, \varphi, t)$ とすれば

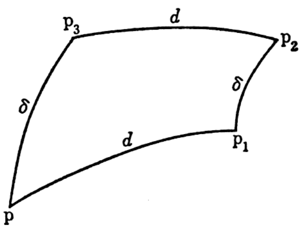
$$\begin{pmatrix} 1/\{1-(2m/r)\} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\{1-(2m/r)\}c^2 \end{pmatrix}$$

で，行列式 $g = -c^2r^4\sin^2\theta < 0$ である．さらに $r = 2m$ では g_{11} が定義されていない．相対性理論では $ds^2 > 0$, $= 0$, < 0 は物理的に重要な意味をもつ．

しかし，$ds \neq 0$ ならば，$ds^2 < 0$ になっても局所的微分幾何学は差支えなく展開される． これらについては，L. P. Eisenhart の Riemannian geometry (Princeton, 第4版 (1960)) をみよ．また相対性理論については，C. Møller の The theory of relativity (みすず書房から邦訳が出ている) が読みやすい．

§ 26. 曲率テンソル

n 次元リーマン空間 M を考えよう． M は n 次元微分可能多様体であって，リーマン計量が与えられており，それからリーマン接続が定められている．M の 4 点



3-2 図

$$\mathrm{p}(x^i), \quad \mathrm{p}_1(x^i + dx^i), \quad \mathrm{p}_3(x^i + \delta x^i),$$
$$\mathrm{p}_2(x^i + dx^i + \delta x^i + \delta dx^i),$$
$$(\delta dx^i = d\delta x^i)$$

をとって，無限小平行四辺形といわれる 3-2 図の閉曲線 C を考えよう．ここに $\widehat{\mathrm{pp}_1}$ は

$$x^i + tdx^i, \qquad t \in [0, 1].$$

$\widehat{pp_3}$ は

$$x^{i}+t\delta x^i, \qquad t\in[0,\ 1].$$

$\widehat{p_1p_2}$ は

$$x^i+dx^i+t\delta(x^i+dx^i), \qquad t\in[0,\ 1].$$

$\widehat{p_3p_2}$ は

$$x^i+\delta x^i+td(x^i+\delta x^i), \qquad t\in[0,\ 1]$$

で与えられる．曲線 C_1 を $\widehat{pp_1}$ と $\widehat{p_1p_2}$ を継いだもの，曲線 C_2 を $\widehat{pp_3}$ と $\widehat{p_3p_2}$ を継いだものとし，E^n の点 p_0 を始点として C_1, C_2 を n 次元ユークリッド空間 E^n に展開したものをそれぞれ γ_1, γ_2 とする．

展開 γ_1 は，$\widehat{pp_1}$ の展開 $\widehat{p_0P_1}$ に，$\widehat{p_1p_2}$ の展開 $\widehat{P_1P_2}$ を継ぎたした曲線である．$\widehat{p_0P_1}$ については，(24.7) により

$$\overrightarrow{p_0P_1}=e_i{}^0dx^i$$

がえられる．ゆえにまた

$$\overrightarrow{P_1P_2}=e_i(x+dx)\delta(x^i+dx^i).$$

したがって γ_1 の終点 P_2 は

$$\overrightarrow{p_0P_2}=e_i{}^0dx^i+e_i(x+dx)\delta(x^i+dx^i).$$

この展開にそってえられるフレーム $\{P(t);\ e_i(t)\}$ のベクトルを考えよう．(24.8) により，P_1 では

$$e_i{}^1=e_i{}^0+\Gamma_i{}^k{}_j(x)e_k{}^0dx^j$$

がえられ，したがって P_2 では

$$e_i{}^2=e_i{}^1+\Gamma_i{}^k{}_j(x+dx)e_k{}^1\delta(x^j+dx^j)$$

がえられる．以上において d と δ を交換すれば，γ_2 に関するもの P_2', $e'_i{}^2$ がえられる．

そこで P_2 と P_2' は一般に異なるであろう．すなわち

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P_2'P_2}&=e_i{}^0dx^i+e_i(x+dx)\delta(x^i+dx^i)\\&\quad-e_i{}^0\delta x^i-e_i(x+\delta x)d(x^i+\delta x^i)\\&=de_i\delta x^i-\delta e_idx^i.\end{aligned}$$

3次以上の無限小を無視した.

$$=\Gamma_i{}^k{}_j e_k{}^0 dx^j \delta x^i - \Gamma_i{}^k{}_j e_k{}^0 \delta x^j dx^i.$$

ゆえに (24.3) により

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_2{}'\mathrm{P}_2} = -T_i{}^k{}_j e_k{}^0 dx^i \delta x^j + \cdots. \tag{26.1}$$

この式によって捩率テンソル $T_i{}^k{}_j$ の幾何的意味が明らかであろう. いまは, リーマン接続を考えているから, $\overrightarrow{\mathrm{P}_2{}'\mathrm{P}_2}$ は3次以上の無限小を無視すれば0である.

次にベクトル $e_i{}^2$, $e'_i{}^2$ について考えよう.

$$e_i{}^2 - e'_i{}^2 = e_i{}^1 + \Gamma_i{}^k{}_j(x+dx)e_k{}^1\delta(x^j+dx^j)$$
$$- e_i{}^3 - \Gamma_i{}^k{}_j(x+\delta x)e_k{}^3 d(x^j+\delta x^j).$$

ここに

$$e_i{}^3 = e_i{}^0 + \Gamma_i{}^k{}_j(x)e_k{}^0\delta x^j.$$

上の $e_i{}^1$ とこの $e_i{}^3$ を代入し, 3次以上の無限小を無視すれば

$$e_i{}^2 - e'_i{}^2 = -R_i{}^k{}_{jh} e_k{}^0 dx^j \delta x^h + \cdots, \tag{26.2}$$

ここに

$$R_i{}^k{}_{jh} = \mathfrak{S}_{jh}\left\{\frac{\partial \Gamma_i{}^k{}_j}{\partial x^h} + \Gamma_i{}^m{}_j \Gamma_m{}^k{}_h\right\} \tag{26.3}$$

とおいた. この (26.3) は (14.4) で与えられた曲面の曲率テンソルと同じ形であり, 考えているリーマン空間 M の**曲率テンソル**という.

このように, 捩率テンソル, 曲率テンソルを曲線の展開を用いて定義することもできるが, § 15 で用いた, 偏微分方程式の積分可能条件

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial u^i}{\partial x^k}\right) \tag{26.4}$$

を用いても定義される. ここに u^i は (1,0)-テンソル, すなわち反変ベクトルの成分とする.

上式を共変微分を用いて表わそう. 左辺は

$$\frac{\partial}{\partial x^k}(u^i{}_{;j} - u^h \Gamma_h{}^i{}_j) = (u^i{}_{;j;k} - u^h{}_{;j}\Gamma_h{}^i{}_k + u^i{}_{;h}\Gamma_j{}^h{}_k)$$

$$-(u^h{}_{;k}-u^l\Gamma_l{}^h{}_k)\Gamma_h{}^i{}_j-u^h\frac{\partial\Gamma_h{}^i{}_j}{\partial x^k}.$$

ゆえに (26.4) は

$$u^i{}_{;j;k}-u^i{}_{;k;j}+u^i{}_{;h}(\Gamma_j{}^h{}_k-\Gamma_k{}^h{}_j)$$
$$-u^h\mathfrak{S}_{jk}\left\{\frac{\partial\Gamma_h{}^i{}_j}{\partial x^k}-\Gamma_h{}^l{}_k\Gamma_l{}^i{}_j\right\}=0$$

となり，(26.3) により

(26.4′) $$u^i{}_{;j;k}-u^i{}_{;k;j}=u^hR_h{}^i{}_{jk}-u^i{}_{;h}T_j{}^h{}_k$$

がえられる．リーマン接続を考えているから，右辺の第2項は消え，さらに一般に，たとえば (1,2)-テンソル $K_{jk}{}^i$ については

(26.5) $$K_{jk}{}^i{}_{;p;q}-K_{jk}{}^i{}_{;q;p}=K_{jk}{}^rR_r{}^i{}_{pq}-K_{rk}{}^iR_j{}^r{}_{pq}-K_{jr}{}^iR_k{}^r{}_{pq}$$

がえられる．これを**リッチの公式**という．

この公式について，特にリーマン接続が計量的であること ($g_{ij;k}=0$) に着目しよう．

$$g_{ij;h;k}-g_{ij;k;h}=0=-g_{rj}R_i{}^r{}_{hk}-g_{ir}R_j{}^r{}_{hk}$$

が成り立つから，(14.10) のように R_{iljk} を与えれば，上式は

(26.6) $$R_{ijhk}+R_{jihk}=0$$

という，曲率テンソルの純共変成分のみたす恒等式がえられる．ところが定義 (26.3) により

(26.7) $$R_{ijhk}+R_{ijkh}=0$$

は明らかである．すなわち，R_{hijk} は前2つの添字，また後2つの添字について反対称である．これらのことは曲面論においても同じであるが，さらに

(26.8) $$\mathfrak{S}_{jkl}\{R_{ijkl}\}=0$$

という公式も成り立つ．ここに3添字のついた $\mathfrak{S}$ は，たとえば

$$\mathfrak{S}_{jkl}\{A_{ij}B_{kl}\}=A_{ij}B_{kl}+A_{ik}B_{lj}+A_{il}B_{jk}$$

というように，3つの添字 j, k, l を循環させて加えることを意味するものとする．曲面は2次元であり，異なる3つの添字がないから，(26.8) は第2章では現われなかったのである．(26.8) の証明を示そう．

(0,0)-テンソル，すなわちスカラー f については，(26.5) は単に

$$f_{;i;j}-f_{;j;i}=0$$

である．そこで

$$(f_{;i;j}-f_{;j;i})_{;k}+(f_{;j;k}-f_{;k;j})_{;i}+(f_{;k;i}-f_{;i;k})_{;j}=0.$$

これを組替えて

$$=(f_{;i;j;k}-f_{;i;k;j})+(f_{;j;k;i}-f_{;j;i;k})$$
$$+(f_{;k;i;j}-f_{;k;j;i}).$$

これに公式 (26.5) を用いて

$$=-f_{;r}R_{i}{}^{r}{}_{jk}-f_{;r}R_{j}{}^{r}{}_{ki}-f_{;r}R_{k}{}^{r}{}_{ij}.$$

ここで f は任意だから，

(26.8′) $$R_{i}{}^{r}{}_{jk}+R_{j}{}^{r}{}_{ki}+R_{k}{}^{r}{}_{ij}=0.$$

(26.6) に注意すれば，上式は (26.8) と同じものであることがわかる．

一般のリーマン空間の曲率テンソルの成分がみたす恒等式は (26.6), (26.7), (26.8) の3組だけである．すなわち，もしこれらとは独立な恒等式が成り立てば，その恒等式によってリーマン空間はある特殊なものであるべきである．これらの一般の恒等式の組を恒等式の完全系という．ただし証明は複雑である．T. Y. Thomas : Differential invariants of generalized spaces (Cambridge, 1934) を参照．

またこれらの完全系を用いて，純共変曲率テンソルの独立な成分は $n^2(n^2-1)/12$ 個であることがすぐわかる．

これらの恒等式から，興味深い恒等式

(26.9) $$R_{hijk}=R_{jkhi}$$

が導ける．証明を示そう．

$$R_{jkhi}=-R_{kjhi}=R_{khij}+R_{kijh}$$
$$=-R_{hkij}-R_{ikjh}$$
$$=(R_{hijk}+R_{hjki})+(R_{ijhk}+R_{ihkj}).$$

ここまでの各段階でどの恒等式を用いたかは明らかだろう．組替えて

$$=(R_{hijk}+R_{ihkj})+(R_{hjki}+R_{ijhk})$$
$$=2R_{hijk}-(R_{jhki}+R_{jihk})$$
$$=2R_{hijk}+R_{jkih}$$

$$=2R_{hijk}-R_{jkhi}.$$

§ 27. 定曲率空間

曲面論においては (16.2′), すなわち

$$R_{1212}=K(g_{11}g_{22}-g_{12}g_{21})$$

が成り立った. これは本質的に

$$R_{hijk}=K(g_{hj}g_{ik}-g_{hk}g_{ij}) \tag{27.1}$$

と同じで, $(h, i, j, k) \neq (1, 2, 1, 2)$ のときは, 上式と同じことか, または $0=0$ にすぎないことは明らかである. そうして曲率 K が定数であるというのは特殊な曲面であった.

さて, $n(\geqq 3)$ 次元リーマン空間では, もし上式が各点で成り立てば, 自動的に K は定数になってしまうのである. これを証明しよう. 証明のもとになるのは, いわゆる**ビアンキの恒等式**といわれる重要な公式

$$\mathfrak{S}_{jkl}\{R_{hijk;l}\}=0 \tag{27.2}$$

である. 上式では j, k, l が cyclic に交換されているから, (26.8) と同様に 2 次元では無意味である. (27.2) は次のようにして証明される.

スカラー f の共変微係数 $f_{;h}$ に関するリッチの公式

$$f_{;h;j;k}-f_{;h;k;j}=-f_{;i}R_h{}^i{}_{jk}$$

の両辺を共変微分して

$$f_{;h;j;k;l}-f_{;h;k;j;l}=-f_{;i;l}R_h{}^i{}_{jk}-f_{;i}R_h{}^i{}_{jk;l}.$$

これに, j, k, l を cyclic に交換してえられる 2 式を加えれば

$$\begin{aligned}&\mathfrak{S}_{jkl}\{f_{;h;j;k;l}-f_{;h;j;l;k}\}\\&\quad=-\mathfrak{S}_{jkl}\{f_{;i;l}R_h{}^i{}_{jk}\}-f_{;i}\mathfrak{S}_{jkl}\{R_h{}^i{}_{jk;l}\}.\end{aligned} \tag{27.3}$$

この式の左辺に再びリッチの公式を適用して, それは次のようになる.

$$\mathfrak{S}_{jkl}\{-f_{;i;j}R_h{}^i{}_{kl}-f_{;h;i}R_j{}^i{}_{kl}\}.$$

これの第1項は (27.3) の右辺の第1項と同じことであり, 第2項は (26.8′) によって消える. こうして (27.3) は

$$f_{;i}\mathfrak{S}_{jkl}\{R_h{}^i{}_{jk;l}\}=0$$

となり，$f_{;i}$ の任意性から（27.2）と本質的に同じものが示されたわけである.

Luigi Bianchi（1856～1928）はイタリーのピサ大学の教授であった. 曲面論，非ユークリッド幾何学の大家である. Bianchi やその偉大な先輩 G. Darboux の仕事には偏微分方程式論が重要であった. Darboux の教科書も有名であるが，また 1893 年に書かれた Bianchi の本 Lezioni di geometria differenziale もそれに劣らず有名で，単に曲面の場合だけでなく，もっと大きな次元にも考慮が払われている.

ビアンキの恒等式について，T. Levi-Civita はその有名な本に次のように書いている.

この恒等式を Ricci が Padova に口授し，Padova が 1889 年に証明なしに発表した. そうして Ricci はこれを忘れてしまったが，Bianchi が後に再発見し，証明をつけて 1902 年に発表した.

また J. A. Schouten もその有名な本に次のように書いている.

この種の恒等式は，1880 年に Voss によってまず研究された. Ricci は Voss とは関係なく発見し，それを Padova へ書き送った. Padova はそれを 1889 年に発表した. 1902 年に Bianchi が独立に証明した. それでイタリーの数学者はこれをリッチ・ビアンキの恒等式という. これらはすべて対称計量接続の場合であるが，1921 年に Bach はワイル接続について，また私はイエナの学会（1921 年）で一般対称接続の場合について同様の恒等式を発表した. Veblen は 1922 年に対称な場合を考え，Weitzenböck は 1923 年に対称でない場合（$T_j{}^i{}_k \neq 0$）にこの恒等式の一般化を証明した.

なお，(41.20)～(41.30) を参照せよ.

これまでにもリッチの lemma (25.5)，すなわち接続が計量的であることをしばしば利用した. たとえば上の（27.2）の証明は

$$\mathfrak{S}_{jkl}\{R_h{}^i{}_{jk;l}\}=0$$

まででとどめたのであるが，(25.5) により

$$R_{hijk;l}=(g_{ir}R_h{}^r{}_{jk})_{;l}=g_{ir}R_h{}^r{}_{jk;l}$$

となるから（27.2）が証明されたのである. 同様に（27.1）を仮定して

$$R_{hijk;l}=K_{;l}(g_{hj}g_{ik}-g_{hk}g_{ij}).$$

ここで j,k,l を cyclic に交換して加えれば，(27.2) により

$$(K_{;l}g_{ik}-K_{;k}g_{il})g_{hj}+(K_{;j}g_{il}-K_{;l}g_{ij})g_{hk}$$
$$+(K_{;k}g_{ij}-K_{;j}g_{ik})g_{hl}=0.$$

これに g^{hj} を掛けて h,j について加えれば

$$(n-2)(K_{;l}g_{ik}-K_{;k}g_{il})=0.$$

これに g^{ik} を掛けて同様に

$$(n-2)(n-1)K_{;l}=0.$$

ゆえに $n \geqq 3$ なら $K_{;l}=\partial K/\partial x^l=0$ となり，K は定数である．

したがって，次元が 3 以上のときには，(27.1) が各点で成り立つようなリーマン空間は **定曲率** であるという．2 次元曲面では，(27.1) は常に成り立ち，特に K が定数のときには定曲率というのである．

曲面は 2 次元リーマン空間である．しかも，逆にどんな 2 次元リーマン空間でも，局所的には，曲面とみなされる．その証明は簡単でないので省略せざるをえない．§ 32 を参照．

後のために，ビアンキの恒等式 (27.2) からある結果をだしておくことにしよう．まず

$$R_{ij}=R_i{}^h{}_{jh}, \tag{27.4}$$

$$R=g^{ij}R_{ij} \tag{27.5}$$

をそれぞれ **リッチテンソル，スカラー曲率** という．リッチテンソル R_{ij} は対称である．というのは，恒等式 (26.9) により，

$$R_i{}^h{}_{jh}=g^{kh}R_{ikjh}=g^{hk}R_{jhik}=R_{ji}.$$

そこで (27.2) に g^{hj} を掛けて，h, j について加えれば

$$R_{ik;l}-R_{il;k}=R_i{}^j{}_{kl;j} \tag{27.6}$$

がえられ，これに g^{ik} を掛けて同様に

$$R_{;l}=2R^i{}_{l;i}. \tag{27.7}$$

ここに $R^i{}_l=g^{ij}R_{jl}$ である．左辺は単に $\partial R/\partial x^l$ であることに注意しよう．

定曲率空間をもっと研究するために，共形変換の概念を準備しておかなければならない．

§ 28. 計量の共形変換

§ 11 において，平面上にメルカトールの地図を作ることによって，誘導計量ではない計量を考えた．このように，同じ n 次元微分可能多様体 M に 2 つの異なるリーマン計量

$$ds^2=g_{ij}(x)dx^idx^j,$$

$$d\bar{s}^2 = \bar{g}_{ij}(x)dx^i dx^j$$

が与えられることもありうる．それぞれの計量が与えられたリーマン空間 M を (M, g), $(M, \bar{g})$ と表わすことにしよう．これらに関して，M の同じ点における同じ接ベクトル $\boldsymbol{u}=(u^i)$ の長さ

$$\sqrt{g_{ij}u^i u^j}, \qquad \sqrt{\bar{g}_{ij}u^i u^j}$$

は一般に異なるであろう．また２つのベクトルのなす角も異なるであろう．それでは，任意の２つのベクトルのなす角が等しいという条件はどうであろうか．２つのベクトル $\boldsymbol{u}=(u^i)$, $\boldsymbol{v}=(v^i)$ についてこの条件は

$$\frac{g_{ij}u^i v^j}{\sqrt{g_{ij}u^i u^j}\sqrt{g_{ij}v^i v^j}} = \frac{\bar{g}_{ij}u^i v^j}{\sqrt{\bar{g}_{ij}u^i u^j}\sqrt{\bar{g}_{ij}v^i v^j}} \tag{28.1}$$

と表わされる．

特に

$$(u^i) = (1, 0, \cdots, 0), \qquad (v^i) = (\alpha, \beta, 0, \cdots, 0)$$

を考えれば，(28.1) は

$$\frac{g_{11}\alpha + g_{12}\beta}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{11}\alpha^2 + 2g_{12}\alpha\beta + g_{22}\beta^2}}$$

と，g_{11}, g_{12}, g_{22} をそれぞれ $\bar{g}_{11}$, $\bar{g}_{12}$, $\bar{g}_{22}$ に取りかえた式とが等しいということを示す．その等式の分母を払い自乗して整理すれば，α, β の 4 次の斉次式がえられ，α^4, $\alpha^3\beta$ は現われない．そこで $\alpha^2\beta^2$, $\alpha\beta^3$, β^4 の係数が現われるが，α, β は任意だから，これらの係数は 0 でなければならない．したがって

$$\bar{g}_{11}{}^2(g_{11}g_{22} - g_{12}{}^2) - g_{11}{}^2(\bar{g}_{11}\bar{g}_{22} - \bar{g}_{12}{}^2) = 0,$$
$$\bar{g}_{11}\bar{g}_{12}(g_{11}g_{22} - g_{12}{}^2) - g_{11}g_{12}(\bar{g}_{11}\bar{g}_{22} - \bar{g}_{12}{}^2) = 0,$$
$$\bar{g}_{11}\bar{g}_{22}g_{12}{}^2 - g_{11}g_{22}\bar{g}_{12}{}^2 = 0$$

がえられる．考えている計量が共に正定値であるという仮定をつければ，(11.4) のように，g_{ii}, $\bar{g}_{ii}$, $g_{ii}g_{jj} - g_{ij}{}^2$, $\bar{g}_{ii}\bar{g}_{jj} - \bar{g}_{ij}{}^2$ はすべて 0 でないから，上の第 1, 2 式より

$$\frac{\bar{g}_{12}}{\bar{g}_{11}} = \frac{g_{12}}{g_{11}} \ (=k)$$

がえられ，第３式は

$$k^2 g_{11}\bar{g}_{11}(\bar{g}_{22}g_{11}-g_{22}\bar{g}_{11})=0$$

となる．$k\neq 0$ なら $\bar{g}_{ij}=lg_{ij}$ $(i,j=1,2)$ という l があることがわかり，$k=0$ なら第1式を用いてやはり同様の結果がえられる．したがって一般に

$$\bar{g}_{ij}=\lambda g_{ij},\qquad i,j=1,\cdots,n \tag{28.2}$$

という関数 $\lambda(x)$ があることがわかる．逆に (28.2) が成り立てば，計量が正定値でなくても (28.1) が成り立つことは明らかである．

このような2つのリーマン計量は**共形的**であるといい，一方から他方へ移ることを，**計量の共形変換**という．共に正定値であれば，λ は正値関数である．そうしてベクトル $\boldsymbol{u}=(u^i)$ の長さは (M,g)，$(M,\bar{g})$ に関してそれぞれ

$$\sqrt{g_{ij}u^iu^j},\qquad \sqrt{\lambda}\sqrt{g_{ij}u^iu^j}$$

となり，共形変換 (28.2) により $\sqrt{\lambda}$ だけ伸びる．ただしこの伸びは $x=(x^i)$ の関数であり，点に依存する．

2次元（曲面）の場合は，(21.5) が示すように，どんな曲面も平面と共形的（等角的ともいう）であり，平面から曲面への伸びは $C(u,v)$ で与えられる．このことは直観的にも説明しておいた．

しかし，次元が3以上になるとこの様な直観は成り立たず，リーマン空間がユークリッド空間と常に共形的であるということにはならない．

§ 29. 共形曲率テンソル

(M,g)，$(M,\bar{g})$ が共形的であるとする． したがって (28.2) が成り立つが，共に正定値であるとして，

$$\bar{g}_{ij}=e^{2\rho}g_{ij} \tag{29.1}$$

と表わすことにしよう（以下の計算の都合上だけである）．これから (25.6) により

$$\bar{\Gamma}_{ijk}=e^{2\rho}\Gamma_{ijk}+e^{2\rho}(g_{ij}\rho_k+g_{jk}\rho_i-g_{ik}\rho_j) \tag{29.2}$$

がえられる．ただし $\rho_i=\rho_{;i}=\partial\rho/\partial x^i$ である．(29.1) から明らかに

$$\bar{g}^{ij}=e^{-2\rho}g^{ij} \tag{29.3}$$

であるから，

$$\bar{\Gamma}_j{}^i{}_k = \Gamma_j{}^i{}_k + \delta^i_j \rho_k + \delta^i_k \rho_j - g_{jk}\rho^i \tag{29.4}$$

がえられる．ただし $\rho^i = g^{ij}\rho_j$ である．

さて，曲率テンソルを求めよう．それには (29.4) によって (26.3) の右辺を計算すればよいが，次のような方法もある．ベクトル $u=(u^i)$ の $(M, \bar{g})$ における共変微係数を

$$u^i{}_{|j} = \frac{\partial u^i}{\partial x^j} + u^h \bar{\Gamma}_h{}^i{}_j$$

と表わす．(29.4) を代入して

$$u^i{}_{|j} = u^i{}_{;j} + u^h P_h{}^i{}_j.$$

ここに

$$P_h{}^i{}_j = \delta^i_h \rho_j + \delta^i_j \rho_h - g_{hj}\rho^i.$$

さらに

$$\begin{aligned} u^i{}_{|j|k} &= \frac{\partial u^i{}_{|j}}{\partial x^k} + u^h{}_{|j}\bar{\Gamma}_h{}^i{}_k - u^i{}_{|h}\bar{\Gamma}_j{}^h{}_k \\ &= (u^i{}_{|j})_{;k} + u^h{}_{|j} P_h{}^i{}_k - u^i{}_{|h} P_j{}^h{}_k \\ &= u^i{}_{;j;k} + u^h{}_{;k} P_h{}^i{}_j + u^h P_h{}^i{}_{j;k} \\ &\quad + (u^h{}_{;j} + u^l P_l{}^h{}_j) P_h{}^i{}_k - u^i{}_{|h} P_j{}^h{}_k. \end{aligned}$$

$P_j{}^i{}_k$ は j, k について対称であるから，

$$\begin{aligned} u^i{}_{|j|k} - u^i{}_{|k|j} &= u^i{}_{;j;k} - u^i{}_{;k;j} + u^h (P_h{}^i{}_{j;k} - P_h{}^i{}_{k;j}) \\ &\quad + u^h (P_h{}^l{}_j P_l{}^i{}_k - P_h{}^l{}_k P_l{}^i{}_j). \end{aligned}$$

したがってリッチの公式 (26.5) により

$$\begin{aligned} \bar{R}_h{}^i{}_{jk} &= R_h{}^i{}_{jk} + P_h{}^i{}_{j;k} - P_h{}^i{}_{k;j} \\ &\quad + P_h{}^l{}_j P_l{}^i{}_k - P_h{}^l{}_k P_l{}^i{}_j \end{aligned} \tag{29.5}$$

がえられる．この式は

$$\bar{\Gamma}_j{}^i{}_k = \Gamma_j{}^i{}_k + P_j{}^i{}_k$$

という関係さえあれば常に成り立つ関係式である． $P_j{}^i{}_k$ の定義式を用いて，(29.5) の右辺の第２項以下を具体的に計算しなければならないが，

(29.6) $$\rho_{ij}=\rho_{i;j}-\rho_i\rho_j+\frac{1}{2}g_{ij}\rho^h\rho_h$$

という対称 (0,2)-テンソルを用いれば,

(29.7) $$\bar{R}_h{}^i{}_{jk}=R_h{}^i{}_{jk}+\delta^i_j\rho_{hk}-\delta^i_k\rho_{hj}+g_{hk}\rho^i{}_j-g_{hj}\rho^i{}_k$$

がえられる. ここに $\rho^i{}_j=g^{ih}\rho_{hj}$ である.

あるものにある変換を行ったときに, もし不変な量があれば, それはこの変換のもとで重要な役割を演ずるものであろう. 不変式論の重要性は2次曲面論において十分に知られている. (29.7) から ρ_{ij} が消去され, 不変なテンソルがえられるのである. まず (27.4) のリッチテンソルを作れば,

(29.8) $$\bar{R}_{hj}=R_{hj}-(n-2)\rho_{hj}-g_{hj}\rho^i{}_i$$

がえられ, 次いで (27.5) のスカラー曲率を作れば, (29.3) により

(29.9) $$\bar{R}=e^{-2\rho}\{R-2(n-1)\rho^i{}_i\}.$$

この (29.9) から $\rho^i{}_i$ を求めて (29.8) へ代入すれば,

(29.8′) $$\rho_{hj}=L_{hj}-\bar{L}_{hj}$$

がえられる. ここに

(29.10) $$L_{hj}=\frac{1}{n-2}\left\{R_{hj}-\frac{R}{2(n-1)}g_{hj}\right\}.$$

ただし $n\geqq 3$ とする. ($n=2$ のときの共形変換についてはもう十分わかっている). (29.8′) を (29.7) へ代入して,

$$\rho^i{}_j=g^{ih}(L_{hj}-\bar{L}_{hj})=L^i{}_j-e^{2\rho}\bar{g}^{ih}\bar{L}_{hj}=L^i{}_j-e^{2\rho}\bar{L}^i{}_j$$

に注意して,

$$\bar{R}_h{}^i{}_{jk}+\delta^i_j\bar{L}_{hk}-\delta^i_k\bar{L}_{hj}+\bar{g}_{hk}\bar{L}^i{}_j-\bar{g}_{hj}\bar{L}^i{}_k=R_h{}^i{}_{jk}+\delta^i_jL_{hk}-\delta^i_kL_{hj}+g_{hk}L^i{}_j-g_{hj}L^i{}_k$$

がえられる. したがって

(29.11)　$$C_h{}^i{}_{jk} = R_h{}^i{}_{jk} + \delta^i_j L_{hk} - \delta^i_k L_{hj} + g_{hk} L^i{}_j - g_{hj} L^i{}_k$$

という不変テンソルがえられた．これを**ワイルの共形曲率テンソル**という．

Hermann Weyl (1885～1955) はチューリッヒ，ゲッチンゲン，最後にアメリカのプリンストンで活躍したドイツ人．リー群論や微分幾何学に主な仕事があるが，Cartan と共に前世紀から今世紀へかけての巨大な数学者である．相対性理論に数学的基礎を与えた名著 Raum, Zeit, Materie (Berlin, 1918) は特に興味深いが，非常に難解である．Einstein は相対性理論を発展させる数学の精妙さを十分理解していたが，次のような冗談をため息まじりに言ったということである．"数学者が相対性理論を攻略しだしてからというものは，わたしは相対性理論が理解できなくなった"．

共形曲率テンソルについて，ビアンキの恒等式 (27.2) のような式を考えておくことにしよう．証明は省略するが．

(29.12)　$$\mathfrak{S}_{jkl}\{C_h{}^i{}_{jk;l}\} = \mathfrak{S}_{jkl}\{\delta^i_j L_{hkl} - g_{hj} L^i{}_{kl}\}.$$

ここに

(29.13)　$$L_{hkl} = L_{hk;l} - L_{hl;k}.$$

(29.11) からリッチテンソルに似た $C_h{}^i{}_{ji}$ を作れば，(29.10) により 0 であることがわかる．ゆえに (29.12) において i と l について加えれば，

(29.14)　$$C_h{}^i{}_{jk;i} = (n-3) L_{hjk}$$

がえられる．

§ 30. 共形的平坦空間

曲面について § 18 で示したことが，一般次元のリーマン空間にも同様に成り立ち，曲率テンソル $R_{hijk} = 0$ という条件は，その空間にリーマン計量が

$$ds^2 = (dx^1)^2 + \cdots + (dx^n)^2$$

という，ユークリッド空間のものと同じに書ける座標 (x^i) があるということである．このようなリーマン空間は**局所平坦**であるという．

さて，2次元のときにはどんな空間でも局所平坦空間に共形的であった．一般に局所平坦な空間 $(M, \bar{g})$ に共形的なリーマン空間 (M, g) は**共形的平坦**であるという．したがって共形的平坦空間においては，計量が

$$ds^2 = e^{2\rho}\{(dx^1)^2 + \cdots + (dx^n)^2\} \tag{30.1}$$

となるような座標 (x^i) があるわけである．

この節の目的は次の定理を証明することが第1である．次元が2と3は特殊な事情がおこる．

定理 （1） 2次元リーマン空間はすべて共形的平坦である．

（2） 次元が $n \geqq 3$ であるリーマン空間が共形的平坦であるための必要十分条件は，$n=3$ なら (29.13) の $L_{ijk}=0$，また $n \geqq 4$ なら (29.11) の $C_h{}^i{}_{jk}=0$ である．

証明は次のようである： 前節のリーマン空間 (M, g) が局所平坦な空間 $(M, \bar{g})$ に共形的であるとする．このとき $\bar{R}_h{}^i{}_{jk}=0$ だから (29.11) により $\bar{C}_h{}^i{}_{jk}=0$. ところが $C_h{}^i{}_{jk}=\bar{C}_h{}^i{}_{jk}$ だから，$C_h{}^i{}_{jk}=0$ でなければならない．そこで $C_h{}^i{}_{jk}=0$ という仮定をして，(29.7) の右辺を0にするような関数 ρ があるかどうかを考えればよい．

さて，ρ は (29.6) により

$$\rho_{;i} = \rho_i, \tag{30.2}$$

$$\rho_{i;j} = \rho_{ij} + \rho_i\rho_j - \frac{1}{2} g_{ij}\rho^h\rho_h \tag{30.3}$$

をみたすが，いまは $\rho_{ij}=L_{ij}$ である．というのは，$\bar{L}_{ij}=0$ と (29.8′) による．したがって (30.2), (30.3) において，ρ, ρ_i 以外は (M, g) から定まる量である．

積分可能条件を調べよう．リッチの公式により，(30.2) については

$$\rho_{i;j} - \rho_{j;i} = 0$$

であるが，これは (30.3) によって成り立っている．(30.3) については

$$\rho_{i;j;k} - \rho_{i;k;j} = -\rho_h R_i{}^h{}_{jk} \tag{30.4}$$

であるが，左辺については (30.3) より

$$\begin{aligned}\rho_{i;j;k} &= L_{ij;k} + \rho_{i;k}\rho_j + \rho_i\rho_{j;k} - g_{ij}\rho^h\rho_{h;k} \\ &= L_{ij;k} + \left(L_{ik} + \rho_i\rho_k - \frac{1}{2} g_{ik}\rho^h\rho_h\right)\rho_j + \rho_i\rho_{j;k} \\ &\quad - g_{ij}\rho^h\left(L_{hk} + \rho_h\rho_k - \frac{1}{2} g_{hk}\rho^l\rho_l\right).\end{aligned}$$

したがって (30.4) の左辺は

$$L_{ijk}+\rho_h(\delta^h_j L_{ik}-\delta^h_k L_{ij}+g_{ik}L^h{}_j-g_{ij}L^h{}_k)$$

と整理されるから，(30.4) は (29.11) を用いて

$$L_{ijk}+\rho_h C_i{}^h{}_{jk}=0.$$

したがって仮定 $C_i{}^h{}_{jk}=0$ のもとでは条件は $L_{ijk}=0$ である．ところが (29.14) により，$n\geqq 4$ では $L_{ijk}=0$ は成り立っている．よって大体証明された．しかし $n=3$ の場合には，なぜ $C_i{}^h{}_{jk}=0$ は不要なのか．

実は $n=3$ では共形曲率テンソル $C_i{}^h{}_{jk}$ は常に消えるのである．これを示そう．そのために**一般化されたクロネッカーの δ** を用いる．記号 $\delta^{ab\cdots c}_{hi\cdots k}$ において，$(a, b, \cdots, c)$，$(h, i, \cdots, k)$ が $1, 2, \cdots, n$ のある順列で，共に偶順列か共に奇順列であればこの記号は値 $+1$ をとり，一方が偶順列で他方が奇順列であれば値 -1 をとり，そうでなければすべて 0 であるとする．たとえば

$$\delta^{12}_{12}=\delta^{21}_{21}=+1,\qquad \delta^{21}_{12}=-1,\qquad \delta^{12}_{22}=0,$$

$$\delta^{123}_{312}=+1,\qquad \delta^{123}_{213}=-1,\qquad \delta^{122}_{123}=0.$$

そうして特に

$$\delta^{12\cdots n}_{hi\cdots k}=\delta_{hi\cdots k},\qquad \delta^{ab\cdots c}_{12\cdots n}=\delta^{ab\cdots c}$$

と書く．そうすれば，3次元リーマン空間の曲率テンソル R_{hijk} から

$$P^{33}=R_{1212},\qquad P^{12}=R_{2331}$$

のようにして作られた記号 P^{ij} は，(26.6)，(26.7) により

(30.5) $$P^{ij}=\frac{1}{4}R_{abcd}\delta^{abi}\delta^{cdj}$$

と表わされ，(26.9) により $P^{ij}=P^{ji}$ が成り立つ．(30.5) は逆に

(30.6) $$R_{hijk}=P^{ab}\delta_{ahi}\delta_{bjk}$$

とも表わされる．また行列 (g_{ij}) において

$$g^{11}=\frac{1}{g}(g_{22}g_{33}-g_{23}g_{32})$$

等であるが，これらも

(30.7)
$$g^{ij}=\frac{1}{2g}\delta^{abi}\delta^{cdj}g_{ac}g_{bd}$$

と表わされよう．

さて，リッチテンソル (27.4) は

$$R_{ij}=R_{hikj}g^{hk}.$$

これに (30.6)，(30.7) を代入し，

$$\delta_{aij}\delta^{ahk}=\delta^{hk}_{ij}$$

を利用して

(30.8)
$$R_{ij}=\frac{1}{g}P^{ab}(g_{ab}g_{ij}-g_{ia}g_{jb})$$

がえられよう．さらにスカラー曲率 (27.5) は

(30.9)
$$R=\frac{2}{g}P^{ab}g_{ab}$$

となる．そこで (29.10) の L_{ij} は

$$L_{ij}=R_{ij}-\frac{R}{4}g_{ij}=\frac{1}{2g}(P^{ab}g_{ab}g_{ij}-2P^{ab}g_{ai}g_{bj}).$$

これから共形曲率テンソル (29.11) の純粋共変成分は

$$C_{hijk}=R_{hijk}+\frac{1}{g}P^{ab}\begin{vmatrix} g_{ab} & g_{ah} & g_{ai}\\ g_{kb} & g_{kh} & g_{ki}\\ g_{jb} & g_{jh} & g_{ji}\end{vmatrix}$$
$$=R_{hijk}+P^{ab}\delta_{akj}\delta_{bhi}$$

となり，(30.6) により 0 であることが示された．

上の 3 次元特有の理論は次のようにも応用される． 一般にリッチテンソル R_{ij} も基本テンソル g_{ij} も対称であるが，これが比例する，すなわち $R_{ij}=\alpha g_{ij}$ というスカラー α があるとき，空間は**アインシュタイン空間**といわれる．このとき，

$$R_{ij}g^{ij}=\alpha g_{ij}g^{ij}$$

より $\alpha=R/n$，したがって

(30.10)
$$R_{ij}=\frac{R}{n}g_{ij}$$

がえられる．

相対性理論において，重力場の方程式は

$$G_{ij}-\Lambda g_{ij}=-\kappa T_{ij}$$

と表わされる．G_{ij} はアインシュタインテンソルといわれ，

$$G_{ij}=R_{ij}-\frac{1}{2}g_{ij}R$$

によって定義される．T_{ij} はエネルギーテンソルといわれ，場の物理的条件から定まる．Λ,κ は universal constant といわれる定数である．Λ は特に cosmological constant といわれ，極めて大きなスケールの現象でなければ，太陽系のなかぐらいなら 0 としてよい．κ は 8π（π は円周率）と考えられるが，真空中では $T_{ij}=0$ なので，真空とみられる太陽系の中の重力場の方程式は単に $G_{ij}=0$ である．しかしそれから，$n=4$ により $R_{ij}=0$ がすぐえられる．

次の定理が 1922 年に E. Cartan によって証明された．

4 次元で，(2,0)-相対テンソル A^{ij} が

（a）$A^{ij}=A^{ji}$,　　（b）$A^{ij}{}_{;j}=0$,

（c）A^{ij} は $g_{kl},\partial g_{kl}/\partial x^r,\partial^2 g_{kl}/\partial x^r\partial x^s$ で表わされる．

（d）A^{ij} は $\partial^2 g_{kl}/\partial x^r\partial x^s$ について 1 次式である．

の 4 条件をみたすとき，A^{ij} は

$$A^{ij}=(aG^{ij}+bg^{ij})\sqrt{g}$$

である．ここに a,b は定数，g は行列式 $|g_{ij}|$，また

$$G^{ij}=R^{ij}-\frac{R}{2}g^{ij}$$

である．

証明は大変な計算を必要とする．$A^{ij}=0$ とすれば $R^{ij}=\dfrac{R}{4}g^{ij}$，すなわち，この 4 次元リーマン空間はアインシュタイン空間である．また $R^{ij}=0$ という方程式は $\sqrt{g}R$ の積分の変分問題からもえられる．矢野健太郎著：相対性理論（至文堂）を参照せよ．

3 次元のアインシュタイン空間を考えよう．このとき，

$$L_{ij}=\frac{R}{12}g_{ij},\qquad C_{hijk}=0$$

よりすぐに

$$R_{hijk}=\frac{R}{6}(g_{hj}g_{ik}-g_{hk}g_{ij})$$

となり，空間は定曲率になる．ゆえに

定 理 3次元アインシュタイン空間は定曲率である．

相対性理論は4次元リーマン空間を取扱う．したがってアインシュタイン空間であるとしても，定曲率とは限らない．有名なド・ジッターの宇宙は定曲率であるが，シュバルツシルドの宇宙（§ 25 参照）は定曲率ではない．

§ 31. 定曲率空間の計量

次元が3以上の場合の定曲率の定義（27.1）から

$$R_{ij}=(n-1)Kg_{ij}, \qquad R=n(n-1)K.$$

これから（29.10）の $L_{ij}=(K/2)g_{ij}$ がえられ，したがって（29.11）の共形曲率テンソル $C_{h\ jk}^{\ i}$ も，（29.13）の L_{hkl} も0になること，ゆえに定曲率空間は共形的平坦であることがわかる．このことを利用して定曲率空間の計量基本式 ds^2 のある標準的な形を求めよう．というのは，共形的平坦だから，

$$g_{ij}=\frac{1}{z^2}\delta_{ij}, \qquad (\delta_{ij}=\delta_j^i) \tag{31.1}$$

となるような座標（x^i）がある．この関数 $z(x)$ を決定しよう．（31.1）から

$$\Gamma_{j\ k}^{\ i}=\frac{1}{z}(z_i\delta_{jk}-z_j\delta_{ik}-z_k\delta_{ij}), \qquad z_i=\frac{\partial z}{\partial x^i}$$

がえられ，したがって

$$\begin{aligned}R_{hijk}=&\frac{1}{z^4}\sum_r(z_r)^2(\delta_{hk}\delta_{ij}-\delta_{hj}\delta_{ik})\\&+\frac{1}{z^3}(z_{ik}\delta_{hj}+z_{hj}\delta_{ik}-z_{ij}\delta_{hk}-z_{hk}\delta_{ij})\end{aligned} \tag{31.2}$$

がえられる．ここに $z_{ij}=\partial z_i/\partial x^j$ である．定曲率であるから，（27.1）と（31.1）により，これが

$$=\frac{K}{z^4}(\delta_{hj}\delta_{ik}-\delta_{hk}\delta_{ij})$$

とならなければならない．これからえられる等式は

$$z(z_{ii}+z_{jj})=K+\sum_r(z_r)^2, \qquad i\neq j, \tag{31.3}$$

(31.4)　　　$z_{ij}=0, \quad i \neq j$

の2組にすぎない.

さて，(31.4) は明らかに

$$z=y_1+y_2+\cdots+y_n$$

であることを示す. ここに y_i は i 番目の x^i だけの関数である. 次に (31.3) において，右辺は i, j に無関係であるから，次元 $n \geqq 3$ により，異なる3つの添字 i, j, k について

$$z(z_{ii}+z_{jj})=z(z_{ii}+z_{kk}).$$

したがって $z_{11}=z_{22}=\cdots=z_{nn}$，ゆえに

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial(x^1)^2}=\frac{\partial^2 y_2}{\partial(x^2)^2}=\cdots=\frac{\partial^2 y_n}{\partial(x^n)^2}$$

となる. ここで第 i 項 $\partial^2 y_i/\partial(x^i)^2$ は x^i のみの関数であるから，上式は定数（$=2A$）に等しくなければならない. ゆえに y_i は x^i の2次式

$$y_i=A(x^i)^2+2B_i x^i+C_i$$

である ($B_i x^i$ は $\sum_i B_i x^i$ ではない). これらにより，(31.3) は

(31.5)　　　$4A\sum_i C_i=K+4\sum_i (B_i)^2.$

したがって (31.5) が関数 z に対する必要十分条件である. ここに $2n+1$ 個の任意定数 A, B_i, C_i が含まれていて，それらはただ1つの等式 (31.5) をみたせばよい. よって，特に $B_i=0, \sum_i C_i=1$ ととれば $A=K/4$ となり

$$z=\frac{K}{4}\sum(x^i)^2+1$$

となる. 結局

(31.6)　　　$ds^2=\dfrac{\sum(dx^i)^2}{\left\{1+\dfrac{K}{4}\sum(x^i)^2\right\}^2}$

がえられた. このことから

定理　次元 $n \geqq 3$ である定曲率空間は，曲率 K が同じであればすべて等長的である.

というのは，そのような空間の ds^2 はすべて同じ形（31.6）に表わされるからである（§ 21 参照）.

§ 32. リーマン空間の超曲面

第2章では3次元ユークリッド空間の曲面を取扱ったが，曲面は2次元リーマン空間である．一般に n 次元リーマン空間の $m(<n)$ 次元部分空間の研究をすれば，$n=3$, $m=2$ で，そとがユークリッド空間である場合には，第2章の曲面論がえられるであろう．特に $m=n-1$ である部分空間を**超曲面**という．ここでは簡単に超曲面について考えよう．

そとの n 次元リーマン空間を (M, g) と表わそう．M の座標 (x^i) が特に $n-1$ 個のパラメーター $u^\alpha\ (\alpha=1, \cdots, n-1)$ の関数

$$x^i = x^i(u^1, \cdots, u^{n-1}) \tag{32.1}$$

と考えられたとき，このような M の点 (x^i) の集り N を M の超曲面という．ただし § 10 の（10.1）に対すると同様の条件のもとで考える．特にヤコビアン行列

$$J(u) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x^1}{\partial u^1} & \cdots & \dfrac{\partial x^n}{\partial u^1} \\ & \cdots\cdots & \\ \dfrac{\partial x^1}{\partial u^{n-1}} & \cdots & \dfrac{\partial x^n}{\partial u^{n-1}} \end{pmatrix}$$

は rank が $n-1$ であるとする．$J(u)$ の第 α 行 $\left(\dfrac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\right)(i=1, \cdots, n)$ は，u^α だけが変化するときに（32.1）で与えられる N 上の曲線 C_α（座標曲線）の接ベクトルと考えられる．ただし，M がユークリッド空間ではないから，幾何的なベクトルとは考えられない．すなわち，（23.3）のように

$$e_\alpha = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\frac{\partial}{\partial x^i} \tag{32.2}$$

という，微分作用素としてのベクトルである．

第2章のように，N に誘導計量が考えられる．すなわち，M の基本式

$$ds^2 = g_{ij}(x)dx^i dx^j$$

は，特に N にそっては

$$= g_{ij}(x(u))\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}du^\alpha du^\beta$$

となるから，$\boldsymbol{e}_\alpha$ と $\boldsymbol{e}_\beta$ の内積

(32.3) $$g_{\alpha\beta}(u) = g_{ij}(x(u))\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}$$

をとれば，N 上にリーマン計量（誘導計量）

(32.4) $$ds^2 = g_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta$$

がえられる．したがって N は $n-1$ 次元リーマン空間であるとみられる．

ヤコビアンの rank は $n-1$ であるから，$n-1$ 個のベクトル $\boldsymbol{e}_\alpha$ は1次独立で，M の接空間 M_p のベクトルであり，M_p は n 次元であるから，もう1つ1次独立なベクトルがある．これを M の計量に関して $\boldsymbol{e}_\alpha$ に垂直な単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ とする．ということは，$\boldsymbol{n}$ の成分を n^i とするとき，

(32.5) $$g_{ij}X_\alpha{}^i n^j = 0,$$

(32.6) $$g_{ij}n^i n^j = 1$$

をみたすということである．行列 (g_{ij}) は正則（rank が n）で，$(X_\alpha{}^i)$ の rank は $n-1$ だから，n^j に関する斉次連立1次方程式 (32.5) は n^i の比 $n^1 : n^2 : \cdots : n^n$ を決定する．ゆえに (32.6) を追加して，各 n^i は符号を除いて決定する．

次にガウスの方程式 (12.3) とワインガルテンの方程式 (12.5) にあたる方程式を作ろう．しかし曲面論ではそとのユークリッド空間の直交座標を用いていたが，ここではそとも一般のリーマン空間であり，そのような便利な座標はない．この不便さは次の複雑な計算の原因である．すなわち，超曲面 N を，(32.1) とは別の座標 $(\bar{x}^a)$ と別のパラメーター $(\bar{u}^\lambda)$ を用いて

(32.1′) $$\bar{x}^a = \bar{x}^a(\bar{u}^1, \cdots, \bar{u}^{n-1})$$

と表わしたとしよう．これから

$$\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a}\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial \bar{u}^\lambda}\frac{\partial \bar{u}^\lambda}{\partial u^\alpha}.$$

したがって (32.2) と同様の

$$\bar{e}_\lambda = \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial \bar{u}^\lambda}\frac{\partial}{\partial \bar{x}^a} \tag{32.2'}$$

をとれば，$e_\alpha, \bar{e}_\lambda$ の成分 $X_\alpha{}^i = \partial x^i/\partial u^\alpha, \bar{X}_\lambda{}^a = \partial \bar{x}^a/\partial \bar{u}^\lambda$ の間には

$$X_\alpha{}^i = \bar{X}_\lambda{}^a \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a}\frac{\partial \bar{u}^\lambda}{\partial u^\alpha} \tag{32.7}$$

という関係式が成り立つ．この式をさらに u^β で微分し，$\partial^2 x^i/\partial \bar{x}^a \partial \bar{x}^b$ には (24.1) を用い，$\partial^2 \bar{u}^\lambda/\partial u^\alpha \partial u^\beta$ には超曲面 N 上の対応する式を用いれば，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial X_\alpha{}^i}{\partial u^\beta} &= \frac{\partial \bar{X}_\lambda{}^a}{\partial \bar{u}^\mu}\frac{\partial \bar{u}^\mu}{\partial u^\beta}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a}\frac{\partial \bar{u}^\lambda}{\partial u^\alpha} \\
&\quad + \bar{X}_\lambda{}^a\left(\bar{\Gamma}_a{}^c{}_b \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^c} - \Gamma_j{}^i{}_k \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^a}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^b}\right)\frac{\partial \bar{u}^\lambda}{\partial u^\alpha}\frac{\partial \bar{x}^b}{\partial \bar{u}^\mu}\frac{\partial \bar{u}^\mu}{\partial u^\beta} \\
&\quad + \bar{X}_\lambda{}^a \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a}\left(\Gamma_\alpha{}^\gamma{}_\beta \frac{\partial \bar{u}^\lambda}{\partial u^\gamma} - \bar{\Gamma}_\mu{}^\lambda{}_\nu \frac{\partial \bar{u}^\mu}{\partial u^\alpha}\frac{\partial \bar{u}^\nu}{\partial u^\beta}\right) \\
&= \frac{\partial \bar{X}_\lambda{}^a}{\partial \bar{u}^\mu}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a}\frac{\partial \bar{u}^\lambda}{\partial u^\alpha}\frac{\partial \bar{u}^\mu}{\partial u^\beta} + \bar{X}_\lambda{}^a \bar{\Gamma}_a{}^c{}_b \bar{X}_\mu{}^b \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^c}\frac{\partial \bar{u}^\lambda}{\partial u^\alpha}\frac{\partial \bar{u}^\mu}{\partial u^\beta} \\
&\quad - X_\alpha{}^j \Gamma_j{}^i{}_k X_\beta{}^k + X_\gamma{}^i \Gamma_\alpha{}^\gamma{}_\beta - \bar{X}_\lambda{}^a \bar{\Gamma}_\mu{}^\lambda{}_\nu \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a}\frac{\partial \bar{u}^\mu}{\partial u^\alpha}\frac{\partial \bar{u}^\nu}{\partial u^\beta}.
\end{aligned}$$

この式は

$$X_\alpha{}^i{}_{;\beta} = \frac{\partial X_\alpha{}^i}{\partial u^\beta} + X_\alpha{}^j \Gamma_j{}^i{}_k X_\beta{}^k - X_\gamma{}^i \Gamma_\alpha{}^\gamma{}_\beta \tag{32.8}$$

とおけば，

$$X_\alpha{}^i{}_{;\beta} = \bar{X}_\lambda{}^a{}_{;\mu} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a}\frac{\partial \bar{u}^\lambda}{\partial u^\alpha}\frac{\partial \bar{u}^\mu}{\partial u^\beta}$$

であることを示している．すなわち，$X_\alpha{}^i{}_{;\beta}$ という量は，M のものとしては (1,0)-テンソル，N のものとしては (0,2)-テンソルの成分のような変換式をみたす．(32.7) の $X_\alpha{}^i$ についても同様のことがいえる．そうして (32.8) はそのような複雑なテンソルの共変微係数を与えている．ということは，$X_\alpha{}^i$ のような量はそのように微分してこそ初めて幾何的意味のあるものがえられるのである．このような微分法を，**N にそっての共変微分法**という．

さて，(32.3) を N にそって共変微分して

$$0=g_{ij}X_{\alpha}{}^{i}{}_{;\gamma}X_{\beta}{}^{j},$$

これと (32.5) を比較して，$X_{\alpha}{}^{i}{}_{;\gamma}$ は n^i に比例することがわかる．そこで

(32.9) $$X_{\alpha}{}^{i}{}_{;\beta}=b_{\alpha\beta}n^{i}$$

とおく．上式がガウスの方程式 (12.3) に相当することは (32.8) から明らかであろう．

次に単位法線 $\boldsymbol{n}$ の定義式 (32.5), (32.6) より同様にして

$$g_{ij}X_{\alpha}{}^{i}{}_{;\beta}n^{j}+g_{ij}X_{\alpha}{}^{i}n^{j}{}_{;\beta}=0,$$

$$g_{ij}n^{i}{}_{;\beta}n^{j}=0.$$

(32.5) とこの第2式を比較すれば，$n^{i}{}_{;\beta}$ が $X_{\alpha}{}^{i}$ の1次結合

(32.10) $$n^{i}{}_{;\beta}=-b_{\beta}{}^{\alpha}X_{\alpha}{}^{i}$$

であることがわかり， 第1式は (32.9), (32.10) を代入して $b_{\alpha\beta}=g_{\alpha\gamma}b_{\beta}{}^{\gamma}$ を示している．このことは，(32.10) がワインガルテンの方程式 (12.5) に相当することを示している．

次に § 14 でえられたガウス， コダッチの公式も，(32.9), (32.10) の積分可能条件を計算すればえられる．ここに N にそっての共変微分法の積分可能条件，すなわち，リッチの公式 (26.5) の拡張を利用する．それは証明を省略するが，$X_{\alpha}{}^{i}$ については

(32.11) $$X_{\alpha}{}^{i}{}_{;\beta;\gamma}-X_{\alpha}{}^{i}{}_{;\gamma;\beta}=X_{\alpha}{}^{j}R_{j}{}^{i}{}_{kh}X_{\beta}{}^{k}X_{\gamma}{}^{h}-X_{\delta}{}^{i}R_{\alpha}{}^{\delta}{}_{\beta\gamma}$$

である．ここに $R_{j}{}^{i}{}_{kh}$, $R_{\alpha}{}^{\delta}{}_{\beta\gamma}$ はそれぞれそとの空間 M, 超曲面 N の曲率テンソルの成分である．こうして，ガウスの公式

(32.12) $$R_{hijk}X_{\alpha}{}^{h}X_{\beta}{}^{i}X_{\gamma}{}^{j}X_{\delta}{}^{k}-R_{\alpha\beta\gamma\delta}=b_{\alpha\delta}b_{\beta\gamma}-b_{\alpha\gamma}b_{\beta\delta}$$

およびコダッチの公式

(32.13) $$R_{hijk}X_{\alpha}{}^{h}n^{i}X_{\beta}{}^{j}X_{\gamma}{}^{k}=b_{\alpha\beta;\gamma}-b_{\alpha\gamma;\beta}$$

がえられる．

特別の場合としてそとの M がユークリッド空間であるとしよう．このとき M の曲率テンソルは消えるから，(32.12), (32.13) はそれぞれ

(32.14) $$R_{\alpha\beta\gamma\delta}=b_{\alpha\gamma}b_{\beta\delta}-b_{\alpha\delta}b_{\beta\gamma},$$

$$b_{\alpha\beta;\gamma}-b_{\alpha\gamma;\beta}=0 \tag{32.15}$$

と，形式的には曲面の場合の (14.5),(14.6) と同じで，ただ添字の動く範囲が $\alpha,\beta,\gamma,\delta=1,\cdots,n-1$ であるにすぎない．したがって § 15 と同様の基本定理がえられる．すなわち，(32.14),(32.15) をみたす $g_{\alpha\beta}(u), b_{\alpha\beta}(u)$ が与えられたとき，これらをそれぞれ第 1，2 基本量とする超曲面が存在し，合同なものを同一視すれば，ちょうど 1 つだけである．

この定理はまた次のように言い表わすこともできる．すなわち，n 次元リーマン空間 $\overline{M}$ が与えられたとき，$n+1$ 次元ユークリッド空間 E の超曲面 N と，1 対 1 の写像

$$\varphi:\overline{M}\to N\subset E$$

があって，$\overline{M}$ と N の φ によって対応する点における第 1 基本式 ds^2 が同じであるとき，φ を**等長的埋込み**という．すなわちリーマン幾何学はすべて基本テンソルによって決まるから，リーマン空間としては $\overline{M}$ と N は同じものとみられる．そこで上の定理は

定 理 n 次元リーマン空間 $\overline{M}$ が $n+1$ 次元ユークリッド空間 E に等長的埋込みできるための必要十分条件は，(32.14),(32.15) をみたす対称テンソル $b_{\alpha\beta}$ が存在することである．ここに $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ は $\overline{M}$ の曲率テンソルであり，(;) は $\overline{M}$ における共変微分法を示す．

これら 2 系の条件のうち，(32.15) は $b_{\alpha\beta}$ に関する 1 階の微分方程式であり，(32.14) はそれに附加的な代数的条件とみられる．一般にこれらの条件は大変に強い．というのは，ふつうのリーマン空間については，

定 理 任意の n 次元リーマン空間は，$n(n+1)/2$ 次元のユークリッド空間へ等長的埋込みできる．

この定理は 1871 年に Schläfli が予想したが，厳密な証明は 1926 年に Janet により，次いで翌年 Cartan によって示された．これらは局所的な話であり，微分方程式の解の問題であるから，リーマン空間の適当に小さい部分をとれば，上の定理のように埋込み可能なのである．

Ludwig Schläfli (1814～1895) は主にスイスのベルンに住んでいた．楕円関数論，共

形写像などの複素関数論を研究したほか，偏微分方程式，さらに代数学，幾何学，光学，天文学にも功績を残した．

Maurice Janet (1888〜　　) は微分方程式の専門家．1926 年にはポーランドのクラカウに住んでいた．

特に $n=2$ とすれば，$n(n+1)/2=3$ であるから，どんな2次元リーマン空間でも，3次元ユークリッド空間の曲面と（局所的には）みなせるわけである．

ところで，正の定曲率（$K>0$）をもつ空間では，(27.1) により，

$$b_{ij}=\sqrt{K}g_{ij}$$

とおけば，(27.1) は (32.14) の形となり，他方 K は定数であるから $b_{ij;k}=0$，ゆえに (32.15) も成り立つ．したがって

定　理　正の定曲率をもつリーマン空間は，ユークリッド空間の超曲面とみなせる．

ところで，§15 の例 2.8 で示したのとまったく同様に，$n+1$ 次元ユークリッド空間の半径 a の超球面は曲率 $1/a^2$ をもつ定曲率リーマン空間である．したがって正の定曲率 K をもつリーマン空間は，半径 $1/\sqrt{K}$ の超球面と（局所的には）みられることになる．

$n+1$ 次元ユークリッド空間に等長的埋込みできるリーマン空間の一般論は，1936 年にプリンストンの T. Y. Thomas によって十分議論された．それについで特殊なリーマン空間が取扱われた．たとえばアインシュタイン空間については，1937 年に C. B. Allendoerfer が，また共形的平坦空間については 1951 年に著者がそれぞれ論文を発表している．

等長的埋込みの問題は多くの興味のある理論が発表されている．たとえば，

（1）　一般に m 次元ユークリッド空間に埋込み可能な n 次元リーマン空間を研究すること．これについては，上記の Allendoerfer，著者，その他の研究がある．

（2）　そとのユークリッド空間の計量を正定値でないものにまで拡張し，埋込まれるリーマン空間の計量も正定値条件をはずしてしまう．このような問題

の拡張は特に相対性理論で必要である．§ 25 で与えたシュバルツシルドの空間は4次元であるが，1921 年に E. Kasner によって，この空間は5次元ユークリッド空間には埋込まれないが，6次元ユークリッド空間には埋込まれることが示された．この6次元の埋込みについても，楕円型，双曲型，放物型といわれる種々の埋込み方法が知られている．

（3） 以上はすでに注意したように，局所的な埋込みであるが，与えられたリーマン空間全体を適当な次元のユークリッド空間へ等長的に埋込む問題の方が重要であろう．この種の問題については，1956 年に公表された J. Nash の論文 "The imbedding problem for Riemannian manifolds" (Annals of Math. 63) が最も重要であろう．そこでは決定的な2つの定理が証明されている．まず，

定 理 正定値リーマン計量をもつ C^k のコンパクトな n 次元リーマン空間は，$n(3n+11)/2$ 次元ユークリッド空間のどんな小さな部分にも，C^k の等長的埋込み可能である．ただし，$3 \leqq k \leqq \infty$ とする．

ここにリーマン空間が C^k であるとは，その基本量 g_{ij} が連続な k 次偏微係数をもつということ．また埋込みが C^k であるとは，部分空間を表わす関数が連続な k 次偏微係数をもつということ．もう1つの定理は

定 理 正定値リーマン計量をもつ C^k の n 次元リーマン空間は，

$$\frac{3}{2}n^3+7n^2+\frac{11}{2}n \qquad \text{次元}$$

のユークリッド空間のどんな小さな部分にも，C^k の等長的埋込み可能である．ただし，$3 \leqq k \leqq \infty$ とする．

第1の定理の "コンパクト" という位相的条件をなくしたわけであるが，これらの定理の証明はまったく大変なものである．

（4） その他にも種々の結果がある．たとえば，1932 年に L. Bieberbach は

ロバチェフスキーの非ユークリッド平面はヒルベルト空間に等長的に埋込まれる

という定理を示した．これは 1901 年に D. Hilbert が示した

この非ユークリッド平面全体はふつうの空間の負の定曲率をもつ解析的曲面としては実現できない

という定理に関連があると思われる．1953 年に D. Blanuša は上の Bieberbach の定理を拡張して，

n 次元双曲的空間はヒルベルト空間に等長的に埋込まれる

を証明した．ここではそとが無限次元のヒルベルト空間になってしまっている．しかし，1955 年に同じ Blanuša が示したように，

非ユークリッド平面は 6 次元ユークリッド空間に等長的に埋め込まれる．

さらに彼は 1962 年にそとを 8 次元の正の定曲率をもつリーマン空間などにとって，種々の負の定曲率曲面の埋込みの実例を与えた．このように，そとをユークリッド空間ではなく，もう少し一般な，しかしよく性質のわかった空間にして，そこへの等長的埋込みの議論をすることも興味がある．

このような等長的埋込みの問題は，一口に言えば，与えられたリーマン計量が，もっと簡単な計量から誘導されたものと考えられないかどうかを調べるものである．第 2 章で与えた曲面上への誘導計量という概念は，この種のものの中で最も簡単なものであるということができる．

4 種々の一般計量

すでに § 22 で引用した Riemann の就任講演において，Riemann は次のように述べた．

"したがって ds は，量 dx の正値 2 次型式の平方根に等しくなる….. そのつぎに簡単な場合は，その線素が 4 次の微分形式の 4 乗根として表わされる多様体であろう．このような，さらに一般な場合の研究も，本質的には前と異なる原理は必要としないであろうが，かなりめんどうな上に，結果を幾何的に表現することができないから，空間の研究に新しい光を与えることはあまりないであろう．そこで私は，線素が 2 次微分型式の平方根で表わされるような多様体だけを考えることにしよう．"

ここで Riemann によって，"新しい光を与えることはあまりないであろう" として採り上げられなかった一般計量の微分幾何学が初めて研究されたのは，それより 64 年後，当時 24 才の Paul Finsler によってであった．Riemann, Finsler にあっては，長さの計量が与えられて，それから幾何学が作られたのであるが，後にこの計量概念がさらに一般化されることになる．これらについて，この章ではその概要を，歴史的な話も織り込んで述べることにしよう．

§ 33. フィンスラー幾何学とは

接続の概念を導入して微分幾何学に偉大な功献をした Cartan (§ 24 参照) は，1934 年 5 月 18 日にモスクワでフィンスラー空間という表題の講演をした．ここでその講演の省訳を示し，しばらくこのフランスの栄光である大幾何学者の講演を直接に聞いていただくことにしよう．

フィンスラー空間とは，n 次元空間であって，そこにおいて無限に近い 2 点 $(x^i), (x^i+dx^i)$ の間の距離 ds の解析的な式

$$ds = L(x^1, \cdots, x^n, dx^1, \cdots, dx^n) \tag{33.1}$$

を与えることによって計量が定義されたものである．ここに関数 L は，$dx^1, \cdots, dx^n$ について (正) 斉 1 次であるとする．リーマン空間では L は $dx^1, \cdots, dx^n$ の 2 次型式の平方根であるから，フィンスラー空間はリーマン空間

の一般化である．この空間は多くの，しかも重要な研究の対象になってきた．その中では P. Finsler と L. Berwald のものをあげれば十分であろう．Finsler はすぐれた幾何的考察によって，ユークリッド幾何学の多くの概念や定理をこの空間に移しこむことに成功した． Berwald はアフィン接続空間の平行移動の理論を一般化した． 私は A. Kawaguchi の最近の非常に一般的な研究をも特記しておこう．

I. 空間の等値問題の概説（省略しよう）．

II. リーマン空間とは，大体をいえば，各点の近傍ではユークリッド空間のすべての性質が保たれる空間である．この意味において，ユークリッド接続をもつ**点空間**である．よく知られているように，この空間は，十分一般な意味において，次のものが与えられれば定義される．

1) 無限に近い2点の間の距離の自乗を表わす式

$$g_{ij}dx^i dx^j.$$

ここに g_{ij} は x^i の関数である．

2) 成分が X^i であり，始点が x^i であるベクトルの絶対微分 DX^i を表わす式

$$DX^i = dX^i + X^k \Gamma_k{}^i{}_h dx^h. \tag{33.2}$$

ここに $\Gamma_k{}^i{}_h$ は与えられた x^i の関数である．

しかし g_{ij} と $\Gamma_k{}^i{}_h$ は決して任意ではない． すなわち， 絶対微分が0であるような動ベクトルの長さは一定でなければならない．このことは

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = g_{rj}\Gamma_i{}^r{}_k + g_{ir}\Gamma_j{}^r{}_k \tag{33.3}$$

によって表わされる．

もしこれが成り立っているならば，この空間の曲線のすべての弧に，ユークリッド空間の曲線の弧がもつすべての幾何的性質とまったく同じものを与えることができる．すなわち，すべての曲線は各点で曲率をもち，フレネー・セレーの公式は何の変更もなしに一般化される．さらに曲面の幾何学を，古典的理論の大部分の性質がそのまま成り立つように適当に作ることもできる．

2次微分型式が1つ与えられれば，それに対応して，ユークリッド接続をもつ点空間が無数に作られる．というのは，条件 (33.3) は $n(n+1)/2$ 個の関数 g_{ij} が既知であるとき，n^3 個の関数 $\Gamma_k{}^i{}_h$ を決定するのに十分ではないからである．与えられた g_{ij} と両立しうるすべてのユークリッド接続のうちから，特殊な特性的性質によって（もしあれば）内在的に定まる特権的な接続を選び出したとき，リーマン幾何学が作られるのである．この内在的なユークリッド接続は，$\Gamma_k{}^i{}_h$ が下の添字について対称であるという解析的性質によって特性づけられる．この性質は座標の任意の変換に際して不変であり，これによって方程式 (33.3) はちょうど1つの解をもつ．幾何的にいえば，この特性はユークリッド接続をもつ空間の振率が無いということを表わす(以下省略)．

III. フィンスラー空間の場合には，ユークリッド接続をもつ点空間という概念だけでは十分でない． ユークリッド接続をもつ**線素空間**という概念が必要である．

線素とは，点 (x^i) と，この点から出る方向との集まりである． この方向とは解析的には n 個の量 $\dot{x}^1, \cdots, \dot{x}^n$ の連比で定義され，これらはすべて同時に0ではなく， 考えている方向へ移動するときに微分 dx^i が $\dot{x}^i$ に比例するという具合なのである．

ユークリッド接続をもつ線素空間は次のものが与えられれば解析的に定義される．

1) 成分が dx^i である無限小ベクトルの長さの自乗を表わす式

$$g_{ij}dx^i dx^j.$$

ここに g_{ij} は線素 $(x^i, \dot{x}^i)$ の関数である．$(x^i, \dot{x}^i)$ を考えているベクトルの**支持線素**という．解析的には g_{ij} は x^i と $\dot{x}^i$ の関数で，$\dot{x}^i$ について0次の斉次でなければならない．

2) 支持線素が $(x^i, \dot{x}^i)$ であるベクトル $X^i(x, \dot{x})$ の絶対微分 DX^i を表わす式

$$DX^i = dX^i + X^k(\Gamma_k{}^i{}_h dx^h + C_k{}^i{}_h d\dot{x}^h). \tag{33.4}$$

ここに，$\Gamma_k{}^i{}_h, C_k{}^i{}_h$ は x^i と $\dot{x}^i$ の関数で， $\dot{x}^i$ についてそれぞれ 0 次，

−1 次の斉次である．$\dot{x}^i$ に任意の因数を掛けても右辺が変化しないという条件は

$$\dot{x}^h C_k{}^i{}_h = 0 \tag{33.5}$$

で与えられる．

さて，すべての曲線（C）に，その各点（x^i）にその点を**中心**とする線素（$x^i, \dot{x}^i$）をつけたもの，すなわちもっと一般に線素の１次元集合（V）に，ユークリッド幾何学がもつ幾何的性質とまったく同じ性質を与えるにはどのようにすればよいかを説明しよう．この集合の線素（$x^i, \dot{x}^i$）がパラメーター t（たとえば０から１まで動くとする）の関数であると考えよう．そのとき n 次元ユークリッド空間の中で連立微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathrm{M}}{dt} = \dfrac{dx^i}{dt}\vec{e_i}, \\ \dfrac{d\vec{e_i}}{dt} = \left(\Gamma_i{}^k{}_h \dfrac{dx^h}{dt} + C_i{}^k{}_h \dfrac{d\dot{x}^h}{dt}\right)\vec{e_k} \end{cases} \tag{33.6}$$

を考えよう．M は未知の点，$\vec{e_1}, \cdots, \vec{e_n}$ はこの点を始点とする未知のベクトルである．この点とこれらのベクトルは，M を原点とし，単位ベクトルが $\vec{e_1}, \cdots, \vec{e_n}$ であるデカルトフレーム（R）を与える．初期条件を，$t=0$ のときに点 M_0，ベクトル $(\vec{e_i})_0$ であると与えて（33.6）を積分するのに，これらのベクトルの内積が $t=0$ のときに g_{ij} という値をとるというただ１つの条件を加えよう．点 M は t が動いて曲線（Γ）をえがき，その各点に線素がついている．線素の方向はフレーム（R）に関して $\dot{x}^i$ に比例するというように定義される．

こうしてユークリッド空間に線素の１次元集合（$\tilde{V}$）がえられる．これを，与えられた集合（V）のユークリッド空間上の地図とでもいうことにしよう．

すぐ証明されるように，（Γ）の無限に近い２点の間の距離の自乗，すなわち，支持線素として（$\tilde{V}$）の線素をもち，無限に近い線素の中心を両端点としてもつベクトルのユークリッド空間における長さの自乗は $g_{ij}(x, \dot{x})dx^i dx^j$ に等しい（証明は省略）．

やはり，与えられた空間において，(V) の各線素に，この線素を支持線素としてもち，成分が X^i のベクトルを考え，フレーム (R) に関して成分がこの X^i であるベクトル $\overrightarrow{X}$, すなわち $X^i\overrightarrow{e_i}$ を考えよう．ユークリッド空間の中でこのベクトルの初等幾何的変化は，(33.6) によって

$$d(X^i\overrightarrow{e_i})=DX^i\overrightarrow{e_i}$$

である．

これらのことによって，線素の1次元集合 (V) に，自然なユークリッド幾何的性質，すなわち，ユークリッド空間の図形 $(\tilde{V})$ に付属している性質をそのまま当てがうことの正当性が明らかになったであろう（以下省略）．

IV. 上の見地に立つならば，フィンスラー空間の幾何学を論理的基礎の上に建設するために解決すべき問題は次のようである．

曲線の長さの要素が，それに接する線素に関して $L(x^1,\cdots,x^n,dx^1,\cdots,dx^n)$ であるというユークリッド接続をもつ線素空間の中で，できるだけ簡単な内在的な特性的性質によって，一意的に定義される接続を研究せよ．

この問題が1つの解をもつということは先験的にはわからない．私は，空間のユークリッド接続に，5つの内在的な自然な条件を課することによって，この問題が解決されることを示した．ただし，積分 $\int L(x,dx)$ の極値問題が，変分学における正則問題であるという L であると仮定しよう．実際には，これらの条件は次の4つに帰着される．

A 支持線素と同じ方向をもつ，成分 $\dot{x}^i$ のベクトルの長さは，$L(x,\dot{x})$ である．

B ベクトル X^i の絶対微分で，その成分 X^i は不変，またその支持線素の中心は不変で，中心の回りに無限小回転するときのものを $\overline{D}X^i$ とする．同じ支持線素をもつ2つのベクトル X^i, Y^i については，対称性

$$\overrightarrow{Y}\cdot\overline{D}\overrightarrow{X}=\overrightarrow{X}\cdot\overline{D}\overrightarrow{Y}$$

が成り立つ．

C 支持線素と同じ方向をもつベクトル X^i については，$\overline{D}\overrightarrow{X}=0$ である．

D 支持線素が自分自身に平行に移動しつつ，ベクトル X^i が動くとき，それを

$$DX^i = dX^i + X^k \Gamma^*{}_k{}^i{}_j dx^j$$

とすれば，量 $\Gamma^*{}_k{}^i{}_j$ は下添字について対称である．

さて，

$$F = \frac{1}{2}L^2, \qquad C_{ijk} = g_{jr}C_i{}^r{}_k$$

とおけば，条件 A,B,C はそれぞれ

$$g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j = 2F,$$
$$C_{ijk} = C_{jik},$$
$$\dot{x}^i C_{ijk} = 0$$

と表わされる．これらはすぐに

$$(33.7) \qquad g_{ij} = \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j}, \qquad C_{ijk} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial \dot{x}^k} = \frac{1}{2}\frac{\partial^3 F}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j \partial \dot{x}^k}$$

に帰着される．

$\Gamma^*{}_k{}^i{}_j$ については，条件 D から複雑な計算によって内在的に自然に求められる．

(33.7) によって与えられる g_{ij} は，変分学によって以前から取扱われていたものである． **基準面** (indicatrix) $L(x, \xi) = 1$ を考えよう． ここに $\xi^1, \cdots, \xi^n$ は原点が点 (x^i) である基準面上のデカルト座標とみられる． 中心が (x^i) で，基準面と点 $\xi^i = \dot{x}^i$ ($L(x, \dot{x}) = 1$ とする) において2次の接触をする2次曲面は

$$g_{ij}(x, \dot{x})\xi^i\xi^j = 1$$

という方程式で表わされる．

フィンスラー空間のユークリッド接続と，変分学の古典的諸概念の間には，他に重要な関係がいくつかあることは当然である．与えられた極値曲線に接する線素 $(x, \dot{x})$ を考えよう． この線素を支持線素としてもつ成分 δx^i の無限小ベクトルがこの支持線素に垂直であるのは， 方向 δx^i が極値曲線にトラン

スバーサルであるときである．要するに極値曲線は，それに接する線素の軌跡とみられるが，ユークリッド空間上では直線を表わし，線素が自分自身に平行に移動しているものである．トランスバーサル性を垂直性と同一視し，極値曲線を空間の測地線と同一視することは，予めそうありたいと思うことであるが，しかし，これらによってだけでは，空間のユークリッド接続は一意的には決まらないのである．

V.　このような原理から作られたユークリッド接続を，L. Berwald によって定義された平行移動と比較するのは興味のあることである．2つの重要な差異がある．

第1に，Berwald はベクトルの絶対微分を，その線素が自分自身に平行に移動しているときだけしか考えていない．ゆえに Berwald の平行移動は，条件 D の $\Gamma^*{}_i{}^k{}_j$ と同じ役割をもつ量 $G_i{}^k{}_j$ ((35.6) 参照) によって完全に決まる．

第2に，Berwald はこの量を決定するのに，E. Noether による注意から出発した．リーマン幾何学では，測地線の方程式は

$$\frac{d^2x^i}{ds^2}+\Gamma_k{}^i{}_h\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^h}{ds}=0$$

という形をもつ．他方，積分 $\int L(x,dx)$ の極値曲線の微分方程式は

$$\frac{d^2x^i}{ds^2}+2G^i\left(x,\frac{dx}{ds}\right)=0$$

という形に書ける．$dx^i/ds=\dot{x}^i$ とし，Noether にしたがってリーマン幾何学における $\Gamma_k{}^i{}_h$ を一般化して，

$$G_k{}^i{}_h=\frac{\partial^2G^i}{\partial\dot{x}^k\partial\dot{x}^h}$$

とおく．これが Berwald が決定した接続係数である（§ 35 参照）．

これらのことは正当ではあるが，**ベクトルの長さが平行移動に際して保たれない**という重大な不便さがある．他方，$G_k{}^i{}_h$ は関数 L の $\dot{x}^i$ に関する4次の偏微係数を含む．私の理論における $\Gamma_k{}^i{}_h, \Gamma^*{}_k{}^i{}_h$ は3次の偏微係数までしか含まないのに．第1の不便さは重大である．というのは，そのためにユークリッド微分幾何学の方法をフィンスラー空間へ一般化しようというと

きに重大な障害がおこるであろう.

VI. リーマン幾何学におけるテンソル計算は，われわれの見地からでは，フィンスラー幾何学へ拡張されうる．この空間の幾何学で最初のテンソルは反変成分が $l^i=\dot{x}^i/L(x,\dot{x})$，共変成分が $l_i=\partial L/\partial\dot{x}^i$ である単位ベクトルである．第2のテンソルは基本テンソル g_{ij} である．これら2つのテンソルの成分は，それらの幾何的意味によって $\dot{x}^1,\cdots,\dot{x}^n$ について0次の斉次関数である．そのようなテンソルは **proper** であるということにしよう．proper でないテンソルも考えなければならない．p 次の improper なテンソルの成分は，proper なテンソルの成分に L^p を掛けてえられる.

テンソルの幾種類かの共変微分法がえられる．たとえば2添字の共変テンソル T_{ij} を考え，

$$DT_{ij}=T_{ij,k}dx^k+T_{ij;k}Dl^k \tag{33.8}$$

とおく，絶対微分 DT_{ij} はリーマン幾何学におけると同様に

$$DT_{ij}=dT_{ij}-T_{rj}(\Gamma_i{}^r{}_k dx^k+C_i{}^r{}_k d\dot{x}^k)-T_{ir}(\Gamma_j{}^r{}_k dx^k+C_j{}^r{}_k d\dot{x}^k)$$

である.

n 個の量 Dl^k は $l_kDl^k=0$ をみたす．すなわち，ベクトル l^i は長さ一定であるということであるが，それによって (33.8) では，$l^kT_{ij;k}=0$ が成り立つように都合つけよう.

この条件のもとで $T_{ij,k}$ と $T_{ij;k}$ は，T_{ij} から2つのテンソルを定義する．g_{ij} のこれら2つの共変微係数は0であり，したがって添字を上げ下げすることと共変微分することとは交換可能である．これに反して，$l_{i,j}=0$ であるが $l_{i;j}$ は g_{ij} そのものである.

第3の共変微係数は，T_{ij} については $\partial T_{ij}/\partial\dot{x}^k$ である．ゆえに C_{ijk} はテンソルである（-1 次の improper)．この第3の共変微係数は，考えているテンソルと C_{ijk} の積と和とによって第2のものに帰着される．この第3のものは添字の上げ下げと交換可能ではない．C_{ijk} が 0，すなわち空間がリーマン空間のときだけは可能であるが.

VII. ユークリッド接続をもつすべての空間のように，フィンスラー空間も

曲率テンソルと捩率テンソルとをもつ．捩率テンソルは $A_{ijk}=LC_{ijk}$ ただ1つである．曲率テンソルは3つあり，その2つは A_{ijk} とその共変微係数で表わされる．第3のもの R_{ijkh} は i と j，また k と h について反対称である．これは Berwald の曲率テンソルに似てはいるが，その成分は L の $\dot{x}^i$ に関する4次までの偏微係数だけで表わされる（Berwald のは5次までの）．他方，Berwald の曲率テンソルの共変成分は上記の反対称性をもたない．というのは，平行移動がベクトルの長さを保たないからである（以下省略）．

Cartan はポーランドの Stanisław Golab（1902～　）が書いたフィンスラー空間の共形変換に関する論文に小さな注意を加えた．それが 1933 年であるが，その同じ年にフィンスラー空間に関する小論文を初めて発表した．そこには上の4つの条件の代りに5つの条件が示され，それによってユークリッド接続を決定した．そうして翌年に有名なフィンスラー空間に関する小冊子が出版された．ところが，5つの条件の独立性についてポルトガルの Aurelino de Mira Fernandes がただちに注意を与えたので，上のように4つの条件に修正したのである．

要するに Cartan のフィンスラー空間論は，ユークリッド接続をもつ線素空間の中から4つの条件によって接続を決定して，リーマン空間論と平行的に取扱うというものであり，長さを保つ平行移動ということが幸いして，1950 年頃までは完全に世界の幾何学者を従えてきたのである．このようなオールマイティはえてして害毒を流すもので，それについては後に書くことにしよう．さしあたり，まず創始者である Finsler の仕事，それに次いで Berwald の仕事を概観しよう．

§ 34. Finsler の学位論文

Paul Finsler（1894～1970）は，1918 年にゲッチンゲン大学へ提出した学位論文：Ueber Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen に書いているように，チューリッヒで商人の子として生まれた．1912 年にシュトウットガルド理工科大学へ入学したが，1913 年には数学を勉強するためにゲッチンゲン大学へ入学した．そこでは特に変分学の大家 Constantin Carathéodory（1873～1950）の世話になり，その師の変分学の幾何学化の問題に取組んだ結果が上

記の学位論文となったのである．

Finsler は一生独身で淋しく暮したようである．チューリッヒ大学の数学基礎論の教授をしていたが，幾何学者としては若い時代の仕事しか無い．同僚の Van der Waerden が書いたように，数学者というよりもむしろ哲学者，宗教家であり，2つの天体を発見したアマチュア天文学者であった．なお，一般にはフィンスラーと呼ぶが，チューリッヒではフィンズラーと濁って発音される．

さて，Riemann の講演から，遅かれ早かれフィンスラー幾何学は生まれるはずであった．また，Hermann Weyl (1885～1955) が Riemann の講演につけた解説 (1919 年) に，"各点における量の決定が…である空間の幾何学的研究は近年 Finsler によってなされた" と書いたが，Finsler 自身は，少くとも学位論文を書いた当時は，Riemann の思想をまったく知らなかったようである．その序文の全訳を記そう．

> この論文は一般計量をもつ多次元の空間の微分幾何学の種々の様相を取扱ったものである．すなわち，曲線の長さは座標とその第1次微分係数とのまったく任意な関数の積分によって測られるとするのである．ユークリッド幾何学や任意の曲がった空間の幾何学はその特殊な場合であり，それに応用される．できるだけ一般な仮定をもつ幾何学を研究することの利益は，個々の定理がどの程度まで特殊な仮定によっているのか，また次元と無関係なのかを認識できるということである．したがって，すべての定理について，それらが成り立つ範囲を正確に限定づけよという問題がでてくるが，この問題にはあまり立ち入らないで，多くの概念や定理が重大な修正をせずに，より一般な場合にも成り立つことを示すことにしよう．ただし，この論文では計量についてある緩い仮定をもうける (§ 21 参照)．すなわち，常に実関数だけを考える．しかし，この仮定をやめても，おそらく理論全部が複素領域において特別の困難なしに成り立つであろう．定義や公式はまったく同じままでよいが，多くの定理が除外例をもち，複雑になるであろう．
>
> 微分幾何学においては，1つの点の近傍だけで曲線や曲面を研究する．というのは，任意に与えられた関数を全体としてではなく，その近傍でよ

くわかっているものとするからである．ここで計量は方向に任意の方法で依存するとする．しかし上の理由から，長さ計量を取扱う限り，個々の線素の近傍だけに制限して考えるものとする．

さて，曲線論は一意的に建設される．曲線の曲率をたとえ別の定義をしたとしても，結果は同じなのである．また曲率は，曲線の本質的に唯一の不変量であって，曲率がその弧長の関数として適当な初期条件のもとで与えられれば，それに応じて曲線は一意に決定する．

曲線論は多次元の曲面の場合に拡張される．曲面もその曲率と適当な初期条件とを与えれば一意に決定するが，その成り立つことの根拠を示すだけで証明はしなかった．

曲面論においてよく知られた多くの定理が一般の場合に証明される．しかし，曲面上の曲線の理論で特殊な計量に依存している例もある．2次元曲面のガウス曲率や平均曲率の概念も一般化される．しかし，これらの量は曲面上の点だけでなく方向にも依存する．すでに法線がそうなので，方向に依存して決まり，ゆえに法円錐で置き換えるべきである．

これらの概念はまた多次元曲面についても定義される．さらに内部曲率の外部曲率への依存性が研究される．No. 16 と No. 17（この論文の § 73 から § 82 まで）では，3次元空間の曲面だけを考える．任意の曲面上の曲線を，次元数に何も制限せずに研究することも興味がある．さらに，特殊な曲線や曲面，たとえば捩率が消えるものや曲率が一定なものを研究することも多くの研究に動機を与えるであろう．

計算に用いた座標はデカルト座標でも，また任意の曲がった座標と考えてもよい．たとえば，2次元曲面の点をユークリッド平面の中にあるとしてもよく，何かある曲がった曲面上にあるとしてもよい．正則変換で互に移りうる座標は同じものとみなされる．幾何的概念の定義が特殊な座標に依存しなければ，任意の正則変換に対して純粋な不変量がえられたことになる．ユークリッド空間では直交変換だけが認められるが．

以上が序文であるが，1918 年では微分可能多様体の概念がまだ明確でなかったのでや

むをえない点もあるが，複素フィンスラー幾何学の可能性を述べたのであろうか.

この学位論文は，1951 年に一般の人にも入手できるようにスイスの Basel にある Verlag Birkhäuser（白樺出版社）から出版された．それには Ostrowski が次のように書いている.

> この論文は大きな影響を後世に残したが，初めての論文にしては稀なことである．ここで創始されたいわゆるフィンスラー幾何学に関して，多くの論文と若干の書物が出版された．この画期的な論文が，Steiner や Schläfli によって基礎づけられたスイスの幾何学の伝統に誠にふさわしいものであるということは，既に明らかな事実である.

さて，その内容を重要な点だけについて述べてみよう．目次はつぎのようである.

第1章 基本概念

I. 幾何的形象
II. 射影
III. 長さ計量
IV. 角の計量
V. 接触度

第2章 曲線論

VI. 接触空間と法線
VII. 第1曲率
VIII. 高次の曲率
IX. 高次の曲率の他の定義
X. 曲線の自然方程式

第3章 曲面論

XI. 概説
XII. 測地線，ミューニエの定理，漸近線
XIII. 曲面の高次の曲率
XIV. デュパンのインディカトリックス
XV. 2次元曲面の曲率
XVI. 測地線の曲率と捩率
XVII. 漸近線の曲率と捩率，可展曲面

全体が 82 の節に細分されている．以下において重要な部分を説明するが，記号は Finsler の用いたものとは適当に変更しよう.

（この論文の）§15 で長さの基本関数 L が定義される．すなわち，n 個の実

数の順序づけられた組 $(x^1, \cdots, x^n)$ の全体である空間 R^n の点 P_0 と，それから出る方向 $\boldsymbol{p}_0$ をとる．$(\mathrm{P}_0, \boldsymbol{p}_0)$ の線素近傍を考えるということは，P_0 の近傍の各点 P にもその点から出る方向 $\boldsymbol{p}$ がつけられていて，$\boldsymbol{p}_0$ と $\boldsymbol{p}$ はあまり違わないという意味である（ここに方向とは，Cartan の記号では $(\dot{x}^i)$ である）．

各線素 $(\mathrm{P}, \boldsymbol{p})$ に，P を始点とし，$\boldsymbol{p}$ と方向も向きも一致するベクトル $\boldsymbol{u}$ が与えられたものとする．さて，空間 R^n の曲線 $x^i = x^i(t)$ についてベクトル $x'^i = dx^i/dt$ がえられる．ここでいう曲線は有向曲線であり，同じ曲線でも向きづけが異なれば別の曲線と考えられる．x'^i の向きはこの有向曲線の向きと一致するように t の増加の向きを定めるものとするが，t の取り方によって x'^i の長さ（自乗の和の平方根）は異なる．そこで，曲線上の点 P と x'^i について，予め線素 (P, x'^i) において上記のベクトル $\boldsymbol{u}$ が与えられているが，x'^i がこの $\boldsymbol{u}$ と一致するようにパラメーター t をとって，それを s と表わす．この s を曲線の弧長と定義する．

さて，$dx^i/dt = (dx^i/ds)(ds/dt)$ であり，ベクトル dx^i/ds の長さ

$$\varphi(x, x') = \sqrt{\sum (dx^i/ds)^2}$$

は既知である（$\boldsymbol{u}$ が指定されているから）．線素 (x^i, kx'^i) と線素 (x^i, x'^i) とは $k>0$ であれば同じ線素であるから，同じベクトル $\boldsymbol{u}$ が指定されており，したがって $\varphi(x, kx') = \varphi(x, x')$ が成り立つ．そこで

$$L(x, x') = \frac{\sqrt{\sum (x'^i)^2}}{\varphi(x, x')}$$

という関数 L を定義する．L は正値をとり，明らかに

$$\frac{ds}{dt} = L(x, x'), \qquad s = \int_{t_0}^{t} L(x, x')dt$$

が成り立つ（上式で x' は，詳しくは $x'^i = dx^i/dt$ である）．定義により，$k>0$ に対して

$$L(x, kx') = kL(x, x')$$

が成り立つ（これを，L は $x'^1, \cdots, x'^n$ について **正斉 1 次** であるという）．

なお註をつけよう．$t = s$ のときは

$$\frac{ds}{ds}=1=L\left(x,\ \frac{dx}{ds}\right).$$

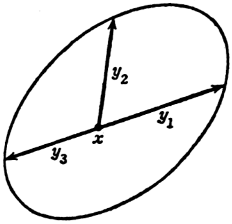
ゆえに dx^i/ds は上に定義した弧長の意味で単位ベクトルである．ところがこれが指定された u と一致するようにパラメーター s を定義したのであるから，u を指定するとは，各線素に対して長さ 1 を指定することである．したがって以下の話がでてくる．

指定されたベクトルの終点全体（始点 x は固定）は，各接空間 T_n（§ 23 の M_p）の中で 1 つの超曲面

$$(34.1)\qquad L(x, X)=1,\qquad x=(x^i),\quad X=(X^i)$$

を定める．これは Carathéodory によって，変分問題 $\delta s=0$ において **indicatrix**（**基準面**）と名づけられたものである．

以上を要約すれば次のようである．$2n$ 変数の関数 $L(x,y)=L(x^1,\cdots,x^n,y^1,\cdots,y^n)$ を与えたとする．ただし L は y について正斉 1 次であると仮定する．点 $x=(x^i)$ を始点とするベクトル $y=(y^i)$ は，$L(x,y)=1$ であるとき長さ 1 であると定義する．したがって点 x の回りに何か超曲面 $L(x,y)=1$ がえがかれていて，x を始点とし，この超曲面上に終点をもつベクトルの長さを 1 と定義する（4-1 図）．



4-1 図

ユークリッド計量では，indicatrix は x を中心とする単位超球面である．したがって単位超球面を一般の indicatrix に拡張することによってフィンスラー計量がえられるのである．4-1 図において y_1 と y_2 のユークリッド的長さは一般には異なる．さらに反対向きの y_1 と y_3 も一般には異なる．

反対向きのベクトルは常に長さが等しい，すなわち $L(x,y)=L(x,-y),\ (y^i)\neq(0)$，が成り立つようなフィンスラー計量は **対称** であるといわれる．リーマン計量は対称であるが，Riemann は対称な $L(x,y)$ しか考えていなかった．一般のフィンスラー計量については，**同じ曲線でも反対向きに測れば長さが異なる**のである．

Finsler は 1969 年の著者への手紙に，次のように書いてきた．

天文学では距離を時間量で測り，特に光年を用いる．1秒を単位にとれば，基準面は半径 300,000km の球面です．空間の各点にこのような球面が対応づけられていて，これによって時間量による距離が測られ，したがって空間の幾何学は単にユークリッド幾何学ですね．しかし，もし光線が重力場における最短線をたどるならば，空間ではリーマン幾何学が成り立

つでしょう. 同様に等方的でない媒質の中を光が通るときには, 光速度は向きに依存し, したがって基準面は球面にはなりません.

さて, また地球上の斜面では遠さが時間量で測られることがよくあります. 道路標示板にも何分かかると書いてありますね. 1分を単位としたときの基準線は中心をもたない (対称でない) でしょうね. 1分で登る距離は1分で降りる距離より短いですから. こうして一般計量 (フィンスラー計量) が定義されます. 正確ではありませんが, これがフィンスラー空間の現実のモデルといえるでしょう. 目的地, たとえば山頂へ至る最短線 (最短時間でゆける道) はこうして複雑に曲がるでしょう.

山の美しいスイスからの手紙であった. 山腹の動物園の近くにある家から, 坂を降りて大学へ, 坂を登って家へと, 哲学者らしく前かがみになって歩いたことだろう.

以下の説明はもう簡単にしよう. (この論文の) § 16 では変分学における正則性が述べられる.

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y^i \partial y^j} = L_{ij} \tag{34.2}$$

とおく. もし

$$L^* = \frac{-1}{\sum (y^i)^2} \begin{vmatrix} L_{11} & \cdots & L_{1n} & y^1 \\ & \cdots\cdots & & \\ L_{n1} & \cdots & L_{nn} & y^n \\ y^1 & \cdots & y^n & 0 \end{vmatrix}$$

が0でなければ, L に関する変分問題 $\delta s = 0$ は**正則**であるという. 上の $n+1$ 次行列式は n 次行列式 $|L_{ij}|$ に1行1列の縁をつけたものであるが, $|L_{ij}|$ それ自身は0である. というのは, $L(x, y)$ は y^i について斉1次だから, $\partial L/\partial y^i = L_i$ は y^i について斉0次である. ゆえに斉次関数の Euler の定理により

$$L_{ij} y^j = \frac{\partial}{\partial y^j}\left(\frac{\partial L}{\partial y^i}\right) y^j = 0.$$

$(y^j) \neq (0)$ であるから, これで証明された.

(この論文の) § 22 に**基本テンソル**

$$g_{ij}=L_iL_j+LL_{ij}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2L^2}{\partial x'^i\partial x'^j} \tag{34.3}$$

が登場する．L の斉次性から

$$L^2=g_{ij}(x,x')x'^ix'^j \tag{34.4}$$

が示される．したがって基準面の方程式 (34.1) はまた

$$g_{ij}(x,x')x'^ix'^j=1 \tag{34.1'}$$

と表わされる．ここに x は固定点，(x'^i) が基準面上の座標である．

（この論文の）§ 23 では**接触基準面**

$$g_{ij}(x,x')X^iX^j=1 \tag{34.5}$$

が定義される．ここでは x,x' は固定され，(X^i) がこの面上の点の座標である．したがって，この面上の $(X^i)=(x'^i)$ という点は基準面上にもあり，この点で2つの面は2次の接触をしている．基準面や接触基準面という概念は，もともと変分学からでてきたものであるが， Cartan のフィンスラー幾何学においてはほとんど重要性をもたない． 1950 年以後のフィンスラー幾何学研究は，基準面に注目することによって大転換をしたということができる．

§ 35. Berwald の接続

§ 33 で述べた Cartan の講演では， 自分の決定したユークリッド接続が Berwald の定義した接続と比較して論じられていた．ここでは Berwald の接続について述べよう．

Ludwig Berwald (1883～1942) はプラハで生まれた． 父は有名な書店の経営者であったが，後にその店を売ってミュンヘンへ移った．Berwald は 1908 年にミュンヘン大学を卒業し，同大学で働いていたが，1924 年にプラハのドイツ大学の教授になった．

プラハにはチェコ大学とドイツ大学があったが， 前者は 1939 年にヒットラー軍によって解散させられ，後者は 1945 年にチェコ当局によって解散させられた．

1941 年 10 月にユダヤ人第3追放者群に夫妻とも加わらされて，ポーランドの Lodz のユダヤ人地区へ収容され， アウシュビッツよりさらに悲惨を極めたといわれるマイダネックへ移送される直前に，夫妻とも病に倒れたのである．

Berwald については， その友人 Max Pinl の感動的な記事が Scripta Math. 27 (1965)，193-203， にある．彼は Lodz へ収容される直前に，7篇の原稿を各所へ送っ

た．それらのうちの6篇は後に出版されたが，その中で最も重要である論文

Ueber Finslersche und Cartansche Geometrie IV

が，その弟子 Henry Loewig によって 1946 年5月にアメリカ数学会に送られ，Annals of Math. 48 (1947) に掲載された．それには出版者の註があり，Loewig から来た手紙が引用されている．それは，

> 1939 年に Berwald は，アーリアン人ではないという理由で，ドイツ大学を追放された．1941 年 10 月 26 日に Lodz へ送られた．終戦後も帰って来ないので，もはや生きてはいないと考えられる．

さて，Berwald は 1919 年にフィンスラー幾何学に関する最初の論文を発表したが，彼の方法が全面的に展開されたのは，1926 年に発表された論文においてである．これは 1924 年にドイツ数学会にて発表された内容を詳しく述べたものである．

彼はフィンスラー空間における測地線を求め，それから接続を定義したのである．すなわち，§ 20 で計算したように，積分

$$s=\int_{t_1}^{t_2} L\left(x,\frac{dx}{dt}\right)dt$$

に関する変分問題の解は (20.6) である．ところで § 33 の Cartan が用いた記号 $F(x,\dot{x})$ は，§ 20 で用いた $F=g_{ij}(x)y^iy^j/2$ と同じであることが (34.4) からわかる ($\dot{x}^i$ また x'^i を y^i と表わす)．ただし § 20 では g_{ij} は x^i の関数であるが，(34.4) の g_{ij} は x^i と y^i の関数である．これが根本的な相異である．

これからわかるように，フィンスラー空間の測地線 (s の極値曲線) は，(20.7) と同様に

$$\frac{d^2x^i}{ds^2}+2G^i\left(x,\frac{dx}{ds}\right)=0, \tag{35.1}$$

$$G^i(x,y)=\frac{1}{2}\gamma_j{}^i{}_k(x,y)y^jy^k \tag{35.2}$$

と表わされる．ここに $\gamma_j{}^i{}_k$ は，(20.7) の $\Gamma_j{}^i{}_k(x)$ と同様にして，$g_{ij}(x,y)$ から x^k で微分して作られたクリストフェルの記号である．ただし (35.1) を導くには，(20.7) を導くよりも少し複雑である．というのは，

$$F_i = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} y^k y^l.$$

これは同じである．しかし，

$$F_{(i)} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{kl}}{\partial y^i} y^k y^l + g_{ki} y^k.$$

ただし，右辺の第1項はこの場合も消える．というのは，(33.7) のように

$$C_{ijk} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}(x,y)}{\partial y^k} = \frac{1}{4}\frac{\partial^3 L^2}{\partial y^i \partial y^j \partial y^k} \tag{35.3}$$

とおけば，C_{ijk} は下の添字について対称であり，$g_{ij}(x,y)$ は $y=(y^i)$ について0次斉次であるから，Euler の定理により

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} y^k = 0.$$

ゆえに

$$C_{ijk} y^k = 0 \tag{35.4}$$

がえられる． 問題の $F_{(i)}$ の式の右辺の第1項は $C_{kli} y^k y^l$ であるから，たしかに消える．次に

$$\begin{aligned}\frac{dF_{(i)}}{ds} &= \frac{d}{ds}\left(g_{ki}\frac{dx^k}{ds}\right)\\ &= \left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}\frac{dx^j}{ds} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial y^j}\frac{dy^j}{ds}\right) y^k + g_{ki}\frac{d^2 x^k}{ds^2},\end{aligned}$$

ここでも $(\partial g_{ki}/\partial y^j)\cdot y^k = 2C_{kij} y^k = 0$ である．ゆえに (20.6) は

$$\frac{1}{2}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} y^k y^l - \left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} y^j y^k + g_{ki}\frac{d^2 x^k}{ds^2}\right) = 0,$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k}\right) y^j y^k - g_{ki}\frac{d^2 x^k}{ds^2} = 0.$$

ここに

$$\gamma_j{}^h{}_k = g^{hi}\left(\frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\right) \tag{35.5}$$

であるから，(35.1)，(35.2) がえられた．

さて，$\gamma_j{}^h{}_k(x,y)$ は $y=(y^i)$ について0次斉次であるから，(35.2) によ

り， $G^i(x,y)$ は $y=(y^i)$ について2次斉次である．ゆえに Euler の定理により，

$$\frac{\partial G^i}{\partial y^j}y^j=2G^i,$$

$$\frac{\partial^2 G^i}{\partial y^j\partial y^k}y^j+\frac{\partial G^i}{\partial y^k}=2\frac{\partial G^i}{\partial y^k}.$$

したがって

$$G_j{}^i{}_k(x,y)=\frac{\partial^2 G^i}{\partial y^j\partial y^k} \tag{35.6}$$

とおけば，

$$G_j{}^i{}_k y^j y^k=\frac{\partial G^i}{\partial y^k}y^k=2G^i.$$

ゆえに，測地線の方程式 (35.1) は

$$\frac{d^2x^i}{ds^2}+G_j{}^i{}_k\left(x,\frac{dx}{ds}\right)\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}=0 \tag{35.7}$$

と，(20.7) のように表わされる．

この $G_j{}^i{}_k$ という量を**ベアバルドの接続係数**というが，これは座標変換 $(x^i)\to(\bar{x}^a)$ に際して，クリストフェルの記号の変換式 (13.4) とまったく同じ形の変換式をみたすことがわかる．したがって，(13.5) において，$\Gamma_k{}^i{}_j$ の代りに $G_k{}^i{}_j$ を用いてえられる量 $u^i{}_{;j}$ はまたテンソルの成分を与えることになる．

しかし，フィンスラー幾何学では，これだけではすまない．Cartan が述べたように，テンソルが proper であろうとなかろうと，一般にその成分は x^i のみならず $\dot{x}^i=y^i$ の関数でもある．最も簡単な場合として，スカラー $f(x,y)$ を考えよう．Cartan が述べた第3の共変微係数

$$f_{\|i}=\frac{\partial f}{\partial y^i} \tag{35.8}$$

はテンソルの成分である．それでは $\partial f/\partial x^i$ はどうか．

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}^a}=\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a}$$

は正しいか．実は誤りである．というのは，座標変換 $\bar{x}^a=\varphi^a(x)$ に際して

$$\frac{d\bar{x}^a}{dt}=\frac{dx^j}{dt}\frac{\partial\bar{x}^a}{\partial x^j}.$$

ゆえに，変換は

$$\bar{x}^a=\varphi^a(x),\qquad \bar{y}^a=y^j\frac{\partial\bar{x}^a}{\partial x^j} \tag{35.9}$$

という複合型となる．ゆえにスカラー f について

$$\bar{f}(\bar{x},\bar{y})=\bar{f}\left(\varphi^a(x),\ y^j\frac{\partial\bar{x}^a}{\partial x^j}\right).$$

これから

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}=\frac{\partial\bar{f}}{\partial\bar{x}^a}\frac{\partial\bar{x}^a}{\partial x^i}+\frac{\partial\bar{f}}{\partial\bar{y}^a}y^j\frac{\partial^2\bar{x}^a}{\partial x^j\partial x^i}. \tag{35.10}$$

これに，$G_j{}^i{}_k$ に関する (13.4) の形の式を代入して

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}=\frac{\partial\bar{f}}{\partial\bar{x}^a}\frac{\partial\bar{x}^a}{\partial x^i}+\frac{\partial\bar{f}}{\partial\bar{y}^a}y^j\left(G_j{}^k{}_i\frac{\partial\bar{x}^a}{\partial x^k}-\bar{G}_b{}^a{}_c\frac{\partial\bar{x}^b}{\partial x^j}\frac{\partial\bar{x}^c}{\partial x^i}\right)$$
$$=\frac{\partial\bar{f}}{\partial\bar{x}^a}\frac{\partial\bar{x}^a}{\partial x^i}+\frac{\partial f}{\partial y^k}y^jG_j{}^k{}_i-\frac{\partial\bar{f}}{\partial\bar{y}^a}\bar{y}^b\bar{G}_b{}^a{}_c\frac{\partial\bar{x}^c}{\partial x^i}.$$

この式は

$$f_{;i}=\frac{\partial f}{\partial x^i}-\frac{\partial f}{\partial y^k}y^jG_j{}^k{}_i \tag{35.11}$$

がテンソルの変換式をみたすことを示している．

これと同様に，y^i に依存するテンソルの成分，たとえば (1,1)-テンソル $K_j{}^i$ については，**x^i に関するベアバルドの共変微係数**は

$$K_j{}^i{}_{;k}=\frac{\delta K_j{}^i}{\delta x^k}+K_j{}^hG_h{}^i{}_k-K_h{}^iG_j{}^h{}_k \tag{35.12}$$

と定義される．ここに (35.11) に登場した新しい微分作用素

$$\frac{\delta}{\delta x^k}=\frac{\partial}{\partial x^k}-y^jG_j{}^i{}_k\frac{\partial}{\partial y^i} \tag{35.13}$$

が用いられたことに注意しよう．

(35.12) の定義に対して，リッチの公式 (26.4′) と同様の式を計算すれば，

ベアバルドの接続の曲率テンソル $H_h{}^i{}_{jk}$ がえられよう ((41.9) 参照).

Berwald は 1926 年に発表した論文に，次の注意書きをした.

この論文は Synge の論文が発表されたときにはすでに完成していた. Synge の論文は一般計量空間に基本テンソル g_{ij} と角の概念を定義したが，これらは共に私がすでに講演したものである. Synge はベクトルの平行移動を定義したが，それは私のとは異なる. また Taylor の論文は私のこの論文の印刷中に発表されたもので，同様の概念について論じてある. Taylor のこの論文は，私のや Synge のものよりも以前に公表されるべく，学会に送られたようである.

ここに少し先取権争いのようなものがみられるが， Synge の論文 (Trans. Amer. Math. Soc. 27 (1925), 頁 61-67) は無視できない論文であるが，ある曲線にそうベクトルの平行移動がその曲線の第 2 次微係数にまでも依存して具合が悪く， また Cartan の定義したものの特別の場合でもある. Taylor の論文は Synge のと同じ雑誌，ただし，頁 246 - 264 に掲載され，Synge に先取権を奪われたようであるが，よくみれば，Berwald が書いたように，Synge のものよりも 8 ケ月早く学会で受理されていたのである. 学会の refereé の怠慢の致すところであろう. Taylor の論文には曲線論がついているが，平行移動については，Synge のものとまったく同じであるのは不思議である.

Taylor の論文にもまた次のような注意書きがある.

この論文を書くにあたって Synge の論文を参照することができなかったのは残念である. 私の論文の校正版が送られてきたときに初めて，Synge が同じ問題を取扱っていることが知らされたのである. しかしそのときは内容があまり重複していないようにみえた. Synge の論文の全内容がわかったのはそれが出版されて後であった.

§ 36. Cartan のユークリッド接続

Finsler が学位論文を書いた 1918 年から， Cartan の小冊子 : Les espaces de Finsler, Actualités 79. が出版された 1934 年より前までを， フィンスラー幾何学史の第 1 期としよう. この Cartan の小冊子に展開された理論は § 33 に示したモスクワにおける講演と本質的に同じものであり， 思想的には 1920 年の前半において Cartan によって打ち建てられた接続論の延長上にある. その内容は線素空間の概念を与え，計量を保つ (計量的) 接続を定義したことにより，フィンスラー幾何学の研究を初めて軌道に乗せたことになり，それ以後，世界各国においてこの幾何学が広く研究されるようになったのである.

線素空間とは，正確にいえば，局所的に $2n$ 個の実数 x^i, y^i $(i=1,\cdots,n)$ の組 (x^i, y^i) の集合であり，(x^i) は n 次元微分可能多様体の点を，(y^i) はこの点から出る有向方向を表わす．すなわち，連比 $y^1:y^2:\cdots:y^n$ だけで定まり，正数 k について，(y^i) と (ky^i) は同一視されるから，y^i のうちで独立なものは $n-1$ 個であり，線素空間の次元は $2n-1$ である．

§ 33 に続き，Cartan の計量的接続を導こう．条件 A, B, C はそれぞれ

$$2F=g_{kh}(x,y)y^k y^h, \tag{36.1}$$

$$C_{ijk}=C_{jik}, \tag{36.2}$$

$$y^i C_{ijk}=0 \tag{36.3}$$

であった．また，$g_{ij}=\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j$ と，Cartan の (33.6) の第2式とから

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}=\Gamma_{ijk}+\Gamma_{jik}, \qquad (\Gamma_{ijk}=g_{jh}\Gamma_i{}^h{}_k), \tag{36.4}$$

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k}=C_{ijk}+C_{jik} \tag{36.5}$$

がえられる．そこで，(36.1) を y^i，さらに y^j で微分し，(36.2)，(36.3)，(36.5) を用いて

$$g_{ij}=\frac{\partial^2 F}{\partial y^i \partial y^j} \tag{36.6}$$

がえられる．したがって，(36.2), (36.5) から

$$C_{ijk}=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k}=\frac{1}{2}\frac{\partial^3 F}{\partial y^i \partial y^j \partial y^k} \tag{36.7}$$

がえられ，接続係数の第2のもの C_{ijk} は基本関数 $L(x,y)$ から決定した．

さて，条件 D を考えよう．それは次のようであった．

支持線素が自分自身に平行に移動しつつ動くときの DX^i を

$$DX^i=dX^i+X^k F_k{}^i{}_j dx^j$$

と（$\Gamma^*{}_k{}^i{}_j$ の代りに，以下において，記号 $F_k{}^i{}_j$ を用いる）すれば，量 $F_k{}^i{}_j$ は下添字について対称である．

すなわち，一般の場合の

$$DX^i=dX^i+X^k(\Gamma_k{}^i{}_j dx^j+C_k{}^i{}_j dy^j)$$

において，特に

$$Dy^i = dy^i + y^k(\Gamma_k{}^i{}_j dx^j + C_k{}^i{}_j dy^j) = 0$$

というときであるが，(36.3) により，この式は

$$dy^i = -y^k \Gamma_k{}^i{}_j dx^j$$

を与える．ゆえに

$$\begin{aligned} DX^i &= dX^i + X^k \Gamma_k{}^i{}_j dx^j - X^k C_k{}^i{}_j y^h \Gamma_h{}^j{}_l dx^l \\ &= dX^i + X^k(\Gamma_k{}^i{}_j - C_k{}^i{}_l y^h \Gamma_h{}^l{}_j) dx^j. \end{aligned}$$

したがって

$$F_k{}^i{}_j = \Gamma_k{}^i{}_j - C_k{}^i{}_l y^h \Gamma_h{}^l{}_j. \tag{36.8}$$

この式に y^k を掛けて，(36.3) により

$$y^k F_k{}^i{}_j = y^k \Gamma_k{}^i{}_j. \tag{36.9}$$

ゆえに (36.8) より，逆に $\Gamma_k{}^i{}_j$ は $F_k{}^i{}_j$ で表わされて

$$\Gamma_k{}^i{}_j = F_k{}^i{}_j + C_k{}^i{}_l y^h F_h{}^l{}_j. \tag{36.10}$$

これを (36.4) へ代入して，(36.2) により

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = F_{ijk} + F_{jik} + 2C_{ijl} y^h F_h{}^l{}_k, \qquad (F_{ijk} = g_{jh} F_i{}^h{}_k).$$

これは (36.7) に注意すれば

$$\frac{\delta g_{ij}}{\delta x^k} = F_{ijk} + F_{jik}. \tag{36.11}$$

ここに $\delta/\delta x^k$ は，Berwald の場合の (35.13) とまったく同様の

$$\frac{\delta}{\delta x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k} - y^j F_j{}^i{}_k \frac{\partial}{\partial y^i} \tag{36.12}$$

である．((35.13) と同じ記号を用いたが混乱を生じない．というのは，実は (36.18′) によって同じものであるから)．

(36.11) が示された以上，F_{ijk} はすぐ求まる．というのは，条件 D は，F_{ijk} が，クリストフェルの記号とまったく同様に i, k について対称であるということを示している．ゆえに (6.3) をえたとまったく同様の手段により

$$F_{ijk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\delta g_{ij}}{\delta x^k} + \frac{\delta g_{jk}}{\delta x^i} - \frac{\delta g_{ki}}{\delta x^j}\right) \tag{36.13}$$

がえられる．(36.12) により，(36.13) の右辺には $F_j{}^i{}_k$ が含まれているから，まだ F_{ijk} は解かれていない．(35.5) のクリストフェルの記号 $\gamma_j{}^i{}_k$ を用いれば，上式は

$$F_{ijk}=\gamma_{ijk}-C_{ijl}F_0{}^l{}_k-C_{jkl}F_0{}^l{}_i+C_{kil}F_0{}^l{}_j. \tag{36.13'}$$

ここに，また以下においても，0 添字はたとえば，一組の量 $K_j{}^i$ について

$$K_0{}^i=y^jK_j{}^i$$

のように用いる．(36.13′) から

$$F_{0jk}=\gamma_{0jk}-C_{jkl}F_0{}^l{}_0. \tag{36.14}$$

さらに

$$F_{0j0}=\gamma_{0j0} \tag{36.15}$$

がえられる．これを (36.14) へ代入して

$$F_{0jk}=\gamma_{0jk}-C_{jkl}\gamma_0{}^l{}_0. \tag{36.14'}$$

ゆえに $\delta/\delta x^k$ は

$$\frac{\delta}{\delta x^k}=\frac{\partial}{\partial x^k}-(\gamma_0{}^i{}_k-C_k{}^i{}_l\gamma_0{}^l{}_0)\frac{\partial}{\partial y^i}. \tag{36.12'}$$

こうして，$C_j{}^i{}_k, \gamma_j{}^i{}_k$ は基本関数 L から求まっているから，(36.13) により接続係数 $F_j{}^i{}_k$ はようやく求まった．

上のように Cartan の $F_j{}^i{}_k$ は，Berwald の $G_j{}^i{}_k$ より求める計算が複雑である． Cartan 自身の計算は上に示したものよりずっと複雑である． しかし Cartan が主張したように， 微分回数については $F_j{}^i{}_k$ の方が簡単である． それよりも (36.13) が $F_j{}^i{}_k$ の美しさをはっきり物語っているではないか．

Berwald の共変微分法 (35.12) と同様に，Cartan の共変微分法

$$K_j{}^i{}_{|k}=\frac{\delta K_j{}^i}{\delta x^k}+K_j{}^hF_h{}^i{}_k-K_h{}^iF_j{}^h{}_k \tag{36.16}$$

が定義されるが，この式の $\delta/\delta x^k$ と (35.12) のそれとは実は同じものである．なんとなれば，(35.2) からえられる

$$G_i=\frac{1}{2}\gamma_{jik}y^jy^k$$

より，

$$\frac{\partial G_i}{\partial y^h}=\frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{jik}}{\partial y^h}y^j y^k+\gamma_{0ih}.$$

ここに，(36.7),(36.3) からえられる

$$\left(\frac{\partial}{\partial y^h}\frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k}\right)y^j y^k=2\frac{\partial C_{jih}}{\partial x^k}y^j y^k=2\frac{\partial}{\partial x^k}(C_{jih}y^j y^k)=0$$

に注意すれば，

(36.17) $$\frac{\partial G_i}{\partial y^h}=\gamma_{0ih}$$

がえられる．また $g^{ij}g_{ik}=\delta^j_k$ を y^h で微分して

(36.7′) $$\frac{\partial g^{ij}}{\partial y^h}=-2C^i{}_h{}^j, \qquad (C^i{}_h{}^j=g^{ik}C_k{}^j{}_h)$$

がえられるから，(36.17) を用いて，

$$\frac{\partial G^i}{\partial y^h}=\frac{\partial}{\partial y^h}(g^{il}G_l)=-2C^i{}_h{}^l G_l+g^{il}\gamma_{0lh}$$
$$=-C^i{}_h{}^l\gamma_{0l0}+\gamma_0{}^i{}_h.$$

ゆえに (36.14′) により

(36.18) $$G^i{}_h=\frac{\partial G^i}{\partial y^h}=F_0{}^i{}_h.$$

これはまた

(36.18′) $$y^j G_j{}^i{}_h=y^j F_j{}^i{}_h$$

とも書けるから， Cartan と Berwald の $\delta/\delta x^k$ が等しいことが示された．

それでは $F_j{}^i{}_h, G_j{}^i{}_h$ 自身の差異はどうであろうか．まず (36.18) を y^j で微分して (35.6) により

(36.19) $$G_j{}^i{}_h=F_j{}^i{}_h+y^k\frac{\partial F_k{}^i{}_h}{\partial y^j}.$$

他方，

$$G_{ijk}=g_{hj}G_i{}^h{}_k=g_{hj}\frac{\partial^2 G^h}{\partial y^k\partial y^i}=g_{hj}\frac{\partial}{\partial y^k}(\gamma_0{}^h{}_i-C_i{}^h{}_r\gamma_0{}^r{}_0).$$

これに，(36.17) をえたと同様にしてえられる

$$\frac{\partial \gamma_{0jk}}{\partial y^i} = \gamma_{ijk} + y^r \frac{\partial C_{ijk}}{\partial x^r},$$

$$\frac{\partial \gamma_0{}^j{}_0}{\partial y^i} = 2G^j{}_i$$

を用いて

$$G_{ijk} = \gamma_{ijk} + y^r \frac{\partial C_{ijk}}{\partial x^r} - \frac{\partial C_{ijk}}{\partial y^r} \gamma_0{}^r{}_0 - 2C_{ijr}G^r{}_k - 2C_{rjk}G^r{}_i, \tag{36.20}$$

ところが (36.13′) の $F_0{}^i{}_j$ は，(36.18′) により $G_0{}^i{}_j$ と書いてもよい．したがって (36.20) と (36.13′) の差をとって，

$$G_{ijk} - F_{ijk} = y^r \frac{\partial C_{ijk}}{\partial x^r} - \frac{\partial C_{ijk}}{\partial y^r} \gamma_0{}^r{}_0 - C_{ijr}G^r{}_k - C_{rjk}G^r{}_i - C_{kir}G^r{}_j$$

がえられるが，右辺は (36.15), (36.18′) により，$C_{ijk|0}$ であることがわかる．ゆえに，

$$G_{ijk} = F_{ijk} + C_{ijk|0} \tag{36.19′}$$

がえられた．差は $C_j{}^i{}_{k|0}$ なのである．副産物として (36.19) より

$$y^k \frac{\partial F_k{}^i{}_h}{\partial y^j} = C_h{}^i{}_{j|0} \tag{36.21}$$

がえられた．

Cartan の線素空間という概念は実に卓見である．(x^i) だけの空間から (x^i, y^i) の空間へ幻想が飛躍した．線素空間の曲線 $\overline{C}$ を考えよう．$\overline{C}$ はパラメーター t によって与えられた $x^i = x^i(t), y^i = y^i(t)$ の作る集合である． これはもとの空間の曲線 C: $x^i = x^i(t)$ と，C にそって定義されたベクトル野 $y^i(t)$ との組である．接続係数は y^i にも依存するから，C にそうベクトルの平行移動はベクトル野 $y^i(t)$ に依存し，したがって $\overline{C}$ にそう平行移動というべきであろう．

ところで Berwald には線素空間の概念がなかったようである． 彼のすきな暖い国イタリーのボロニアで 1928 年に講演したとき，次のように述べた．

> 平行移動の成分 $(G_j{}^i{}_k)$ が y に依存しないという特別の場合を取扱っているのではないから，空間の点 (x^i) からそれに近い点への平行移動は次のようにいわなければならない．すなわち，点 (x^i) に予め指定された方向 $dx^1 : dx^2 : \cdots : dx^n$ を対応づけておく．そうして点 (x^i) におけるベクトル (ξ^i) を，任意の線素 $(x^i,$

δx^i）にそって，予め指定された方向（dx^i）に関して，点（$x^i+\delta x^i$）におけるベクトル（$\xi^i+\delta\xi^i$）に平行移動するとは

$$\delta\xi^i + G_j{}^i{}_k(x, dx)\xi^j\delta x^k = 0$$

が成り立つことであるとする．

この"予め指定された方向（ausgezeichnete Richtung）"とは，Berwald が最初の論文から用いた少し苦しい言葉であるが，彼の苦労がにじみ出ている．Berwald の苦労の上に立って，Cartan が飛躍できたのであろう．

しかし線素空間という概念にも何かひっかかるものがある．n 次元多様体 M のフィンスラー幾何学はただちにその線素空間 $\overline{M}$ の幾何学ではない．なるほど，フィンスラー幾何学に現われる量は一般に線素（x^i, y^i）の関数，したがって $\overline{M}$ 上の関数である．しかし接続係数やテンソルの添字は 1 から n まで動くので，1 から $2n-1$（$=\overline{M}$ の次元）までは動かない．$2n-1$ 次元空間 $\overline{M}$ 上の量であって添字が 1 から n までしか動かないものとは一体何であるか．このような欠点のためにであろうか，ドイツ流の幾何学者は今でも線素空間の概念を拒否する人が多い．あくまでも M 自身の幾何学と考えて，Cartan の接続を巧みに定義したのは Ottó Varga（1909～1969）であり，また Rolf Sulanke（フンボルト大学）もそうである．Varga は Berwald の弟子であり，長らくブダペスト大学の教授であった．彼の接触リーマン空間という概念は大変興味がある．

しかし，これらの巧みな概念をすべて超えて，現今のファイバーバンドルの概念はフィンスラー幾何学に整然たる基礎を与える．それについては

H. Akbar-Zadeh : Les espaces de Finsler et certaines de leurs généralisations, (Thése Sc. math., Paris, 1961), Ann. scient. Éc. Norm. Sup. 80 (1963), 1-79.

M. Matsumoto : The theory of Finsler connections, Publ. Study Group of Geometry 5, Okayama, 1970.

また一般には入手し難いが，次の 2 つの学位論文も興味があろう．

B. T. M. Hassan : The theory of geodesics in Finsler spaces, (Thesis Univ. Southampton, 1967).

P. Dazord : Propriétés globales des géodésiques des espaces de Finsler, (Thése Sc. math., Lyon, 1969).

線素空間の量であるのに添字が n までしか動かないという点で，フィンスラー幾何学の量は片割れにすぎないという意見もある（矢野健太郎）．未知の残りの片割れを知るには，M の微分幾何学を接バンドルへ持ち上げる方法もあり，また上記の著者の本の第 V 章で示されたように，接バンドルの上へ，たとえば Cartan の接続を持ち込む方法もある．いずれにしてもファイバーバンドルの概念が必要である．

§ 37. 接空間のリーマン計量

リーマン空間 M の計量 $g_{ij}(x)dx^i dx^j$ において， x を固定 $(x^i=x_0{}^i)$ すれば，点 x_0 における接空間 M_0 はユークリッド空間とみられる．すなわち，接ベクトル u^i の長さは $g_{ij}(x_0)u^iu^j$ の平方根で与えられる．

フィンスラー空間 M を考えよう．基本関数 $L(x,y)$ から (34.3) によって基本テンソル $g_{ij}(x,y)$ がえられる．ここで x を固定 $(x^i=x_0{}^i)$ すれば，点 x_0 における接空間 M_0 にリーマン計量

$$g_{ij}(x_0,y)dy^idy^j$$

がえられ，M_0 はリーマン空間と考えられる．こうして M の各点 p の接空間 M_{p} はリーマン空間であり，リーマン幾何学をもつ．しかし x が変われば $g_{ij}(x,y)$ も変わるから，各点で別のリーマン幾何学がえられよう．こうして M のすべての点についてえられるリーマン幾何学を総合したものが，M のフィンスラー幾何学であるといえないこともない．

さて，リーマン空間 M_{p} のクリストフェルの記号を求めよう．それは (25.6) のように

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k}+\frac{\partial g_{jk}}{\partial y^i}-\frac{\partial g_{ki}}{\partial y^j}\right)$$

であるが，(35.3) により，これは C_{ijk} に等しい．ゆえに Cartan のユークリッド接続に現われる第2の接続係数 $C_j{}^i{}_k(x,y)$ は，点 $\mathrm{p}=(x^i)$ における接空間 M_{p} のクリストフェルの記号であることがわかった．

それでは，座標変換に際して (24.1) のように

$$\overline{C}_a{}^c{}_b\frac{\partial y^k}{\partial \bar{y}^c}=C_i{}^k{}_j\frac{\partial y^i}{\partial \bar{y}^a}\frac{\partial y^j}{\partial \bar{y}^b}+\frac{\partial^2 y^k}{\partial \bar{y}^a\partial \bar{y}^b} \tag{37.1}$$

をみたすのであろうか．確かにそうであるが，この場合の変換は (35.9) で与えられ，x は固定されているから，

$$\bar{y}^a=y^jA_j{}^a,\qquad A_j{}^a=\left(\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^j}\right)_{\mathrm{p}}$$

という定数係数の斉1次変換である．したがって (37.1) の右辺の第2項は消え，$\partial y^i/\partial \bar{y}^a=\partial x^i/\partial \bar{x}^a$ であるから，$C_i{}^k{}_j$ は (1,2)-テンソルである．

次に曲率テンソル $S_h{}^i{}_{jk}$ を調べよう．(26.3) により

$$S_h{}^i{}_{jk} = \mathfrak{S}_{jk}\left\{\frac{\partial C_h{}^i{}_j}{\partial y^k} + C_h{}^l{}_j C_l{}^i{}_k\right\}. \tag{37.2}$$

しかしこれは大変簡単になるのである．それをみるために純粋共変成分 S_{hijk} を求めよう．

$$\begin{aligned} S_{hijk} &= g_{ir} S_h{}^r{}_{jk} \\ &= \mathfrak{S}_{jk}\left\{\frac{\partial}{\partial y^k}(g_{ir} C_h{}^r{}_j) - \frac{\partial g_{ir}}{\partial y^k} C_h{}^r{}_j + C_h{}^l{}_j C_{lik}\right\} \\ &= \mathfrak{S}_{jk}\left\{\frac{\partial C_{hij}}{\partial y^k} - 2C_{ikr} C_h{}^r{}_j + C_h{}^l{}_j C_{lik}\right\}, \end{aligned}$$

ここで (36.7) により $\partial C_{hij}/\partial y^k = \partial C_{hik}/\partial y^j$ であるから

$$S_{hijk} = -C_{hjr} C_i{}^r{}_k + C_{hkr} C_i{}^r{}_j. \tag{37.3}$$

このように，曲率テンソルの成分は $g_{ij}(x,y)$ の y^i による 2 次微係数を含まないという，注目すべき事実がある．

もし M がリーマン空間であれば，$g_{ij}(x,y)$ は y を含まない．したがって (36.7) により $C_{ijk}=0$ であり，$S_{hijk}=0$ である．しかし逆に $S_{hijk}=0$ なら M はリーマン空間であろうか．確かに一般のリーマン空間論では，曲率が 0 なら (31.6) によりユークリッド計量がえられ，したがって $g_{ij}(x)$ が定数であるような座標がある．それでは，$S_{hijk}=0$ なら，考えているフィンスラー計量は実はリーマン計量にすぎない？

これを否定する明らかな事実がある．それは，**任意の** 2 次元フィンスラー空間では $S_{hijk}=0$ であるという定理である．これを示そう．§ 33 の VI で与えた単位ベクトル

$$l^i = \frac{y^i}{L(x,y)}, \qquad l_i = g_{ij} l^j = \frac{\partial L(x,y)}{\partial y^i} \tag{37.4}$$

を考えよう．接空間 M_p はいまは 2 次元であるから，この l^i に垂直な単位ベクトル m^i が，向きを無視すればちょうど 1 つある．すなわち

$$g_{ij}(x,y) m^i m^j = 1, \qquad g_{ij}(x,y) l^i m^j = 0. \tag{37.5}$$

(34.3) により

$$g_{ij}=l_il_j+LL_{ij} \tag{37.6}$$

であるが，行列式 $|L_{ij}|=0$ であったから，行列 (L_{ij}) の rank は1である．しかも

$$L_{ij}l^j=\frac{1}{L}\frac{\partial L_i}{\partial y^j}y^j=0.$$

というのは，$L_i(x,y)$ は y について正斉0次であるから．したがって

$$L_{ij}=pm_im_j$$

という p がある．(37.6) へ代入し，(37.5) の第1式によって $p=1/L$ であり

$$g_{ij}=l_il_j+m_im_j \tag{37.6$'$}$$

と表わされることがわかる．

次に (36.3)，すなわち $C_{ijk}l^i=0$ より

$$LC_{ijk}=Im_im_jm_k \tag{37.7}$$

という I があることがわかる． 以上は Berwald の 1927 年の論文による． スカラー I を Berwald の**主スカラー**という． (37.7) を (37.3) へ代入すれば，すぐ $S_{hijk}=0$ がえられる．ゆえに，

定 理　2次元フィンスラー空間では，接空間の曲率テンソル $S_h{}^i{}_{jk}$ は常に0である．

常に0であるから，$S_h{}^i{}_{jk}=0$ は何も条件にならない．ではなぜ，$S_h{}^i{}_{jk}=0$ であればリーマン空間論におけるように，空間は局所平坦であるということにならないのであろうか． その原因は接空間 M_p における座標変換の群が狭くなっているということである． 座標変換 $(y^i)\to(\bar{y}^a)$ は定数係数の斉1次変換で， 底空間 M の任意の座標変換 $(x^i)\to(\bar{x}^a)$ にともなってえられるものに限られる．このような (y^i) を $\boldsymbol{M_p}$ **の線形座標**ということにしよう．ところがリーマン空間論で，曲率 $R_{hijk}=0$ なら，$\bar{g}_{ab}(\bar{x})$ が定数であるような座標 $(\bar{x}^a)$ がとれるという定理を応用すれば，$S_{hijk}=0$ であれば，$\bar{g}_{ab}(x,u)$ が u^a を含まないという座標 (u^a) が M_p 内にとれても，(u^a) が線形座標であるという可能性はほとんど無であろう．

しかもなお，次の定理（条件はあるが）が成り立つから実に不思議である．

定 理 $n(\geqq 3)$ 次元フィンスラー空間において，$S_{hijk}=0$ であれば，空間はリーマンである．ただし，基本関数 L は

（i） $(y^i) \neq (0,\cdots,0)$ で微分可能で，

（ii） 対称 $L(x,y)=L(x,-y)$ である

と仮定する．

これは Frederick Brickell が 1966 年のモスクワにおける国際数学者会議で発表したものであり，証明はふつうの微分幾何学の手段を越えるので省略せざるをえない．とにかく対称性という強い条件がついている．条件（i）は，リーマン計量

$$L(x,y)=\sqrt{g_{ij}(x)y^iy^j}$$

でも，$(y^i)=(0)$ では微分不可能であることを注意しておこう．

なお，テンソル C_{ijk} から

$$C_i=C_i{}^j{}_j=C_{ijk}g^{jk} \tag{37.8}$$

を作ることができ，$C_il^i=0$ であるから，2 次元であれば $C_i=cm_i$ というスカラー c があり，c は C_i の長さである．C_i は Cartan により**捩率ベクトル**といわれ，これが 0 である場合に面白い性質があることが論じられた．Cartan 自身，次の定理を夢にも予想せずに．

定 理 $C_i=0$ であるフィンスラー空間はリーマン空間である．

これは 1953 年に Arno Deicke が発表した定理である（Arch. Math. 4 (1953), 45-51）が，証明は Brickell の場合と同様に複雑である．C_i は次のような意味をもつ．行列 (g_{ij}) において，g_{ij} の余因数を G^{ij} とすれば，$G^{ij}=gg^{ij}$ である．g は行列式 $|g_{ij}|$ の値，g^{ij} は逆行列の要素である．ところが

$$\frac{\partial g}{\partial y^i}=\frac{\partial g_{jk}}{\partial y^i}G^{jk}=2C_{ijk}gg^{jk}.$$

ゆえに

$$C_i = \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial y^i}. \tag{37.9}$$

がえられる．したがって Deicke の定理は，行列式 $g=|g_{ij}|$ の値が y^k に無関係であれば，すでにそのすべての要素 g_{ij} も y^k に無関係であることを主張しているのである．

以上でしばらくフィンスラー幾何学の話は中断して，第5章で再び初めからこの幾何学を，Berwald や Cartan のように特殊な立場からさっそく接続を決定してしまうのでなく，極めて一般な立場から建設することを行なおう．

§38. 超面積計量

すでにみたように，Cartan は 1933 年にフィンスラー幾何学に関する最初の論文を書き，その翌年に小冊子を出版して彼の方法を全面的に展開してみせた．ところがすでに 1933 年に面積の概念に基づく微分幾何学を小冊子：Les espaces métriques fondés sur la notion d'aire, Actualités 72, Paris 1933. にまとめて突然出版したのである．その内容は n 次元空間に $n-1$ 次元面積が与えられたものとして，それからすべての幾何学的概念を引き出そうというものであり，次元的には明らかにフィンスラー幾何学の双対をなすものである．しかし Cartan 自身にあっては，Finsler と同様に，変分学の幾何学化という思想が動機であったようであり，双対性は後に生じたもののようである．

上の小冊子の序文に Cartan は，リーマン幾何学においても，またその一般化であるフィンスラー幾何学においても，測地線の理論が重要であるが，それは単一積分の変分学と密接な関連があることを注意している．同様に重積分に基づく幾何学を建設することを以下において述べるが，そこではこの重積分の変分学が重要な役割を演ずるであろうということを強調している．この幾何学で考える空間を**カルタン空間**という．

フィンスラー幾何学史に最大の足跡を残した Berwald は，カルタン空間論でも重要な功献をした．ここでは彼の 1939 年の論文にしたがって，カルタン空間の幾何学を少し述べてみよう．フィンスラー幾何学が多様体の接ベクトル（反変ベクトル）の作るバンドルを用いて現代風に建設できることを注意した

が，それと双対的に共変ベクトル，または1次微分形式の作るバンドルを用いてカルタン空間論が現代化されるであろう．しかし単に双対的であるといっても，種々の異なる事情もある．以下においては特にそれに注意しよう．

n 次元微分可能多様体 M の中に，§ 32 で考えたように，$n-1$ 個のパラメーター u^α $(\alpha=1,\cdots,n-1)$ に関して与えられた方程式

$$x^i = x^i(u^1,\cdots,u^{n-1}) \tag{38.1}$$

によって，M の超曲面 U がえられる．ここでも，関数行列

$$(X^i_\alpha), \qquad X^i_\alpha = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}$$

は最高の rank $n-1$ をもつとする．　この行列において第 i 列 $(X^i_1,\cdots,X^i_{n-1})$ を消してえられる $n-1$ 次小行列式を $(-1)^{i+1}p_i$ とする．

さて，超曲面 U 上の任意の領域の面積が $n-1$ 重積分

$$\sigma = \int\cdots\int F(x^1,\cdots,x^n,p_1,\cdots,p_n)du^1\cdots du^{n-1} \tag{38.2}$$

で a priori（先天的）に与えられたものとする．　この式に現われた基本関数 $F(x,p)$ に基づいて幾何学を作ろうとするわけである．

例 4.1　積分学でよく知られているように，直交座標系 (x,y,z) がとられたふつうの空間で，曲面 $z=f(x,y)$ の表面積は，重積分

$$\iint\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

で計算される．そこで

$$x=u^1, \qquad y=u^2, \qquad z=f(u^1,u^2),$$

また $(x,y,z)=(x^i)$ とすれば，関数行列 (X^i_α) は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dfrac{\partial z}{\partial x} \\ 0 & 1 & \dfrac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix}$$

であるから，

$$p_1 = -\frac{\partial z}{\partial x}, \qquad p_2 = -\frac{\partial z}{\partial y}, \qquad p_3 = 1$$

であり，成分が (p_i) であるベクトルは曲面の法線ベクトルである．面積は

$$\iint\sqrt{(p_1)^2+(p_2)^2+(p_3)^2}\,du^1du^2$$

であり，基本関数 F は

$$F=\sqrt{(p_1)^2+(p_2)^2+(p_3)^2}$$

となり，x^i を含まない．

例 4.2　§ 16 で，曲面の面積は

$$\iint\sqrt{g}\,du^1du^2$$

で与えられることを示した．ここに g は

$$g_{ij}=\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial X^\alpha}{\partial u^i}\frac{\partial X^\alpha}{\partial u^j}$$

を要素とする2次の行列式である．この場合にも

$$g=g_{11}g_{22}-(g_{12})^2=(p_1)^2+(p_2)^2+(p_3)^2$$

がすぐ示めされよう．

一般に基本関数 $F(x,p)$ について以下のような仮定をもうけるが，上の例からみて当然であろう．

まず $(p_i)\neq(0)$ で定義されて微分可能である．正値関数であり，p_i に関して正斉1次である．さらに

$$a_{ij}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2F^2}{\partial p_i\partial p_j} \tag{38.3}$$

を係数とする2次型式は正定値である（上式は後に訂正する）．

さて，フィンスラー幾何学においては，スカラーを $y^i(=x'^i)$ で偏微分すればテンソルがえられた．こうして，(34.3) によって (0,2)-テンソルである基本テンソル $g_{ij}(x,y)$ がえられた．同様に (38.3) によって…?．フィンスラー幾何学では，座標変換 $(x^i)\to(\bar{x}^a)$ に際して，

$$\bar{y}^a=y^i\frac{\partial\bar{x}^a}{\partial x^i}\ \to\ \frac{\partial\bar{y}^a}{\partial y^i}=\frac{\partial\bar{x}^a}{\partial x^i}$$

が成り立ち，したがってスカラー $f(x,y)$ について，

$$\frac{\partial f}{\partial y^i}=\frac{\partial f}{\partial\bar{y}^a}\frac{\partial\bar{y}^a}{\partial y^i}=\frac{\partial f}{\partial\bar{y}^a}\frac{\partial\bar{x}^a}{\partial x^i}$$

がえられ，$\partial f/\partial y^i$ は (0,1)-テンソルになったのである．ところが，p_i の場合には

$$p_i=\bar{p}_a\frac{\partial\bar{x}^a}{\partial x^i}J,\qquad J=\left|\frac{\partial x^i}{\partial\bar{x}^a}\right| \tag{38.4}$$

であることが行列式論によりすぐわかる．ゆえに § 13 で定義したように，p_i は重さ 1 の相対 (0,1)-テンソルであることがわかる（y^i は純粋 (1,0)-テンソルであった)．これから，スカラー $f(x,p)$ について，

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{p}_a}=\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial \bar{p}_a}=\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i}J$$

となり，$\partial f/\partial p_i=f^i$（上添字にする）とおけば

$$\bar{f}^a=f^i\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i}J \tag{38.5}$$

となる．ゆえに，f^i は重さ 1 の相対 (1,0)-テンソルである．

以上により，(38.3) の a_{ij} は a^{ij} と書くべきであり，こうして

$$\bar{a}^{ab}=a^{ij}\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i}\frac{\partial \bar{x}^b}{\partial x^j}J^2 \tag{38.6}$$

がえられよう．a^{ij} は重さ 2 の相対 (2,0)-テンソルである．その行列式の値 $a=|a^{ij}|$ は

$$\bar{a}=a\,J^{2n-2}$$

をみたすから

$$\frac{\bar{a}^{ab}}{\bar{a}^{1/(n-1)}}=\frac{a^{ij}}{a^{1/(n-1)}}\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i}\frac{\partial \bar{x}^b}{\partial x^j}.$$

ゆえに

$$g^{ij}=\frac{a^{ij}}{a^{1/(n-1)}} \tag{38.7}$$

は純粋の (2,0)-テンソルである．

そこで行列 (g^{ij}) が正則である（と仮定された）ことを用いて，その逆行列 (g_{ij}) を作り，その要素 $g_{ij}(x,p)$ によって，

$$ds^2=g_{ij}(x,p)dx^idx^j \tag{38.8}$$

と，長さ計量 ds を定義するのである．

重さのある相対テンソルの共変微分は注意を要する．たとえば $T_j{}^i(x)$ がリーマン空間の重さ r の相対 (1,1)-テンソルとすれば，その共変微係数は

$$T_j{}^i{}_{;k}=\frac{\partial T_j{}^i}{\partial x^k}+T_j{}^h\Gamma_h{}^i{}_k-T_h{}^i\Gamma_j{}^h{}_k-rT_j{}^i\Gamma_h{}^h{}_k$$

のように最後の項がつく．実際，$g_{ij;k}=0$ より明らかに $g_{;k}=0$ であろう．それは，g が重さ 2 の相対スカラーであるから

$$g_{;k}=\frac{\partial g}{\partial x^k}-2g\Gamma_h{}^h{}_k=0.$$

((37.9) を参照せよ．そこでは $\Gamma_h{}^h{}_k=C_k$).

カルタン空間では，上のように，単に p_i で偏微分しても（絶対）テンソルがえられないことに注意しなければならない．フィンスラー空間では，たとえば，(37.4) によってただちに単位ベクトル l_i がえられたが，(38.5) のように，$\partial F/\partial p_i$ は

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{p}_a}=\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i}J$$

をみたす．ところが g_{ij} は (0,2)-テンソルであるから，その行列式 g は

(38.9) $$\sqrt{\bar{g}}=\sqrt{g}\,|J|.$$

ゆえに $\partial F/\partial p_i$ そのものではなく，

(38.10) $$l^i=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial F}{\partial p_i}$$

とおけば，l^i は反変ベクトルであるとは，なお正確にはいえず，(38.9) で行列式の値 J ではなく，その絶対値がでてきたことが少し問題である．

Berwald にしたがってこれを次のように考えよう． 各超曲面の単位法線ベクトルの共変成分 l_i は

$$l_iX^i_\alpha=0, \qquad g^{ij}l_il_j=1$$

をみたす．超曲面に向きづけをして，$l_i=\rho p_i\ (\rho>0)$ であるようにしておく．(38.7) により

$$g^{ij}=\frac{1}{2g}\frac{\partial^2F^2}{\partial p_i\partial p_j}$$

がえられるから，F の斉次性によって

$$g^{ij}l_il_j=\frac{\rho^2}{2g}\frac{\partial^2F^2}{\partial p_i\partial p_j}p_ip_j=\frac{\rho^2}{g}F^2=1,$$

ゆえに $\rho=\sqrt{g}/F$ となり，

$$l_i=\frac{\sqrt{g}}{F}p_i, \tag{38.11}$$

((37.4) の第1式を参照). これと (38.10) により $l^i l_i=1$ が成り立ち, したがって (38.10) が正しい.

カルタン空間にも接続を定義しなければ, その微分幾何的展開は望めない. Cartan はここでもユークリッド接続の概念を適用する. § 36 の絶対微分 DX^i は, ここでは

$$DX^i=dX^i+X^k(\Gamma_k{}^i{}_j dx^j+C_k{}^{ij}dp_j)$$

と表わされ, C の添字は上に2つである. (36.4), (36.5) に応じて, それぞれ

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k}=-\Gamma^{ij}{}_k-\Gamma^{ji}{}_k, \qquad (\Gamma^{ij}{}_k=g^{ih}\Gamma_h{}^j{}_k),$$

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial p_k}=-C^{ijk}-C^{jik}, \qquad (C^{ijk}=g^{ih}C_h{}^{jk})$$

が代って登場する. 接続係数 $\Gamma_k{}^i{}_j, C_k{}^{ij}$ を決定するために Cartan が与えた条件は, フィンスラー幾何学の場合とほぼ平行的である. そうして

$$C^{ijk}=-\frac{1}{2}\frac{\partial g^{ij}}{\partial p_k}$$

がえられる. したがって C^{ijk} は純粋テンソルではない.

$$A^{ijk}=\frac{F}{\sqrt{g}}C^{ijk}$$

によって純粋テンソルがえられる. (37.9) に相当する式は

$$A^i=g_{jk}A^{ijk}=\frac{F}{\sqrt{g}}\left(\frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial p_i}\right)$$

である.

§ 39. 高次計量と面積計量

1854 年にリーマン空間が誕生し, 1918 年にフィンスラー空間が, さらに 1933 年にカルタン空間が創始された. フィンスラー計量はリーマン計量の直接の一般化であり, 最初は generalized metric と呼ばれた. カルタン計量はフィンスラー計量の双対であると考えられる.

このような微分幾何学の歴史は，さらに Cartan のユークリッド接続の概念が他の一般な接続へと発展し，これが微分幾何学の主流として現在に至っているのであるが，また計量の一般化の流れも，1933 年で停まったのでないことを見過ごすわけにゆかない．§ 33 でみた Cartan の講演の序文にすでに，A. Kawaguchi の最近の非常に一般的な研究をも特記しておこうと述べられた仕事がその一つである．それらの仕事とは，

（1） Theory of connexions in the generalized Finsler manifold, I, II, III. Proc. Imp. Acad. Japan 7 (1931), 211–214; 8 (1932), 340–343; 9 (1933), 347–350.

（2） Die Differentialgeometrie in der verallgemeinerten mannigfaltigkeit. Rend. Cir. Mate. Palermo 56 (1932), 246–276.

などで展開され，1935 年に H. V. Craig や J. L. Synge によって**河口空間**とよばれた空間の微分幾何学である．それは上の論文（1）の表題からわかるように，一般化されたフィンスラー計量に基づくものである．ここで一般化とは次の意味である．

フィンスラー空間の基本計量関数は，空間の座標 x^i とその第 1 次微係数 $x'^i=dx^i/dt$ の関数 $L(x,x')$ であり，曲線の長さが積分

$$\int L\left(x,\frac{dx}{dt}\right)dt$$

で測られたのである．これに対して n 次元河口空間 $K_n^{(M)}$ では，座標 x^i と，第 M 次までの微係数

$$x^{(\alpha)i}=\frac{d^\alpha x^i}{dt^\alpha},\qquad \alpha=1,\cdots,M$$

の関数 $L(x,x^{(1)},\cdots,x^{(M)})$ が与えられて，曲線の長さが

$$\int L(x,x^{(1)},\cdots,x^{(M)})dt \tag{39.1}$$

で測られるものとするのである．これを **order M** の河口空間，または**高次空間**という．

フィンスラー空間の場合と同様に，曲線の長さがパラメーター t の取り方

に依存しないという条件が必要であり，それがいわゆる**ツェルメロの条件**

$$(39.2)\quad \begin{cases} \varDelta_1 L = \sum_{\alpha=1}^{M} \alpha x^{(\alpha)i} \dfrac{\partial L}{\partial x^{(\alpha)i}} = L, \\ \varDelta_\lambda L = \sum_{\alpha=\lambda}^{M} \dbinom{\alpha}{\lambda} x^{(\alpha-\lambda+1)i} \dfrac{\partial L}{\partial x^{(\alpha)i}} = 0, \qquad \lambda = 2, \cdots, M \end{cases}$$

である．

いわゆる河口空間の創始者 河口商次（1902～　　）は，1932 年から 1966 年まで北海道大学理学部の教授であった．現在は相模工業大学教授である．その研究のかたわら，1937 年に Tensor Society を組織して，1938 年から 1949 年まで和文のテンソル学会誌を出版し，1950 年から欧文の会誌に変更して現在に至り，微分幾何学の普及と発展に努力している．わが国における微分幾何学の父の一人である．

河口空間論がフィンスラー幾何学の単なる一般化ではないことは，フィンスラー幾何学がリーマン幾何学のそれではないのと同様である．単なる一般化を好む数学者が非常に多いが，そのような学者の研究は，一般化しても同様の理論，事実がほとんどそのまま成り立つということをもって満足するのである．そのようなことはほとんどの場合にまったく空虚であるといわざるをえない．一般化した場合には，今まで考えられなかった数学の領域が対象として含まれてくるであろう．そこには今までと同様ではない何かがある．第 5 章でこのようないくつかの例をみることになろう．

河口空間論もまた，変分学の幾何学化なのである．それは (39.1) で与えられた積分の変分学である．このような試みは，すでに 1930 年に Craig によって試みられた．また，1 つの変換群に対応して 1 つの幾何学が存在するという Klein の幾何学観の中に含まれるとみられる．というのは，フィンスラー幾何学は変換群 (35.9) に対応するもの ($\bar{x}^a = \varphi^a(x, y)$, $\bar{y}^a = \psi^a(x, y)$ ではない！）であるが，河口空間ではこれがさらに複雑になる．たとえば，

$$x^{(2)i} = \frac{d^2 x^i}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a}\frac{d\bar{x}^a}{dt}\right)$$
$$= \frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^a \partial \bar{x}^b}\frac{d\bar{x}^b}{dt}\frac{d\bar{x}^a}{dt} + \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a}\frac{d^2 \bar{x}^a}{dt^2},$$

ゆえに

$$x^{(2)i}=\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a}\bar{x}^{(2)a}+\frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^a\partial \bar{x}^b}\bar{x}^{(1)a}\bar{x}^{(1)b}.$$

同様に $x^{(3)i},\cdots$ がえられよう．こうして，河口空間の微分幾何学は大変ややこしいことになりそうだと想像される．

テンソルも一般化されて **extensor** の概念が生まれる．それは

$$X^{(\alpha)a}_{(\beta)i}=\frac{\partial \bar{x}^{(\alpha)a}}{\partial x^{(\beta)i}}$$

とおき，変換法則

(39.3) $\quad \bar{v}^{(\alpha)a}=X^{(\alpha)a}_{(\beta)i}v^{(\beta)i}, \qquad \alpha,\beta=0,1,\cdots,G;\ i,a=1,\cdots,n$

をみたす $n(G+1)$ 個の量 $v^{(\beta)i}$ を **excontravariant exvector** という．G をその grade または range という．ただし $x^{(0)i}=x^i$ とした．たとえば，$x^{(\alpha+1)i}$ $(\alpha=0,1,\cdots,M)$ はそうである．**excovariant exvector** も同様に定義され，$\partial F/\partial x^{(\alpha)i}$ がそうである．extensor の概念も同様である．

河口空間においても，第1変分を0とおいて測地線の一般化がえられ，また計量基本テンソル g_{ij} がえられる．接続も考えられるが，これらを説明することは困難である．何といっても記号が非常に複雑になってしまう．

特別の場合として，order 2 の河口空間で，基本関数 $L(x,x^{(1)},x^{(2)})$ が

$$L=\{A_i(x,x^{(1)})x^{(2)i}+B(x,x^{(1)})\}^{1/p}$$

というように，$x^{(2)}$ の入り方が簡単であるものを**特殊河口空間**とよび，多くの興味ある研究がある．

河口空間論について多くの論文が出版されているが，便利にまとめた本が無いのは残念である．多少まとまったものでは，河口至商の書いた

An introduction of the theory of higher order spaces I, II, RAAG Memoirs 3 (1962), 719-734; 4 (1968), 578-592.

がある．

さて，同じ河口商次の創始したものに，いわゆる**面積空間**がある．これはある意味で，フィンスラー空間とその次元的双対であるカルタン空間との中間に位するものである．これは

Ein metrische Raum, der eine verallgemeinerung des Finslerschen

Raumes ist. Monatsh. f. Math. u. Physik 43 (1936), 289-297.
すなわち, 1936 年にオーストリーの数学誌に発表された論文によって出発したのである. これは n 次元微分可能多様体 M の m 次元部分空間が, 方程式

$$x^i = x^i(u^1, \cdots, u^m), \qquad i = 1, \cdots, n$$

で与えられ,

$$p = (p^i_\alpha), \qquad p^i_\alpha = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}$$

として, その m 次元的面積が, m 重積分

$$\int \cdots \int L(x, p) du^1 \cdots du^m \tag{39.4}$$

で a priori に与えられたとするものである.

一般に n 次元ユークリッド空間や n 次元リーマン空間の m 次元部分空間の理論は, § 32 の超曲面 (次元が $n-1$) の場合のようにはうまくゆかないのである. われわれは第2章で述べた曲面論というモデル的理論をもっているが, この場合は $n=3, m=2$ で超曲面である. $m=n-2=3-2=1$ になれば単に曲線にすぎない. こうして, 超曲面論と曲線論を除いて, 一般次元の曲面論にはモデルが無い. また m 次元曲面には, 互に直交する法線が $n-m$ 個あり, 取り方には自由度があり, 曲面の性質を研究する方法にこの自由度が影響を及ぼすことになる.

曲線論 —— フィンスラー幾何学,
超曲面論 —— カルタン幾何学

に対して, 一般次元の曲面論に応ずるものが河口の面積空間論であるといえよう.

面積空間論の大要は幸い, 河口自身その他によってまとめられた
An introduction to the theory of areal spaces. Fac. Sci. Hokkaido Univ. (1964)
がある. これでも十分ではないが.

面積空間論で第1の困難は, 基本計量テンソル g_{ij} の存在問題である. こ

れについて，1947 年にベルギーの Debever によって **metric class の面積空間**という概念が与えられた．その定義を書き下すさえ複雑なので，$m=2$ としよう．そうして基本関数 L から

$$(39.5)\qquad \begin{cases} p_i^\alpha = \dfrac{\partial \log L}{\partial p_\alpha^i}, \\ L_{ij}^{\alpha\beta} = (\partial p_i^\alpha / \partial p_\beta^j) + p_j^\alpha p_i^\beta \end{cases}$$

を作る．$m=2$ だから，$\alpha, \beta = 1, 2$ である．これらはフィンスラー空間の場合のそれぞれ $l_i/L, (g_{ij}-l_i l_j)/L^2$ にあたることは (37.4), (37.6) からわかる．さらに

$$\overset{(1)}{G}{}_{ij}^{\alpha\beta} = p_i^\alpha p_j^\beta, \qquad \overset{(2)}{G}{}_{ij}^{\alpha\beta} = L_{ij}^{\alpha\beta}$$

とおく．そうして一般に，n^2 個の量 T_{ij} について

$$T_{[ij]} = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}),$$

すなわち，反対称部分を，添字に [ ] をつけて示そう．そこで

$$(39.6)\qquad \lambda!\mu!\, g^{(pq)}_{ij\,;hk} = \delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta}\overset{(p)}{G}{}^{\alpha}_{[i[h}{}^{\gamma}\overset{(q)}{G}{}^{\beta}_{k]j]}{}^{\delta}$$

とおく．$\delta_{\alpha\beta}$ はすでにしばしば用いたクロネッカーの δ で，p, q は 1 か 2 であるが，1 が λ 個，2 が μ 個で，$\lambda+\mu=2$ とする．そうして

$$(39.7)\qquad g_{ij;hk} = \sum_{p,q} g^{(pq)}_{ij\,;hk}$$

とおく．$\sum$ はすべての p, q について加えるとする．さて，これが

$$(39.8)\qquad g_{ij;hk} = g_{[i[h}g_{k]j]}$$

と書けるような量 g_{ij} があるとき，空間は metric class であるという．

1948 年に岩本秀行によって，上のような g_{ij} は，あれば一意に定まり，ある g'_{ij} を用いて $L_{ij}^{\alpha\beta}$ が，

$$(39.9)\qquad L_{ij}^{\alpha\beta} = g'_{ij}g^{\alpha\beta}$$

と分解することが証明された．この式は実はリーマン空間でもフィンスラー空間でもカルタン空間でも成り立つもので，大変具合のよい結果である．ところが不幸にして，1953 年に旦代晃一によって，metric class の面積空間はこれ

らリーマン空間，フィンスラー空間，カルタン空間のどれかにすぎないことが証明されてしまったのである．

フィンスラー幾何学においてもよく似た事情がある．§ 37 で Deicke の定理 “$C_i=0 \rightarrow$ リーマン” を述べた．実は $C_i=0$ をみたすフィンスラー空間については，Cartan 以来面白い研究が多く出版されたが，それは当り前すぎたのである．

そこで metric class では条件が強すぎたので，もっと弱い条件を考えださざるをえない．$L^{(\alpha\beta)}_{ij}=\frac{1}{2}(L^{\alpha\beta}_{ij}+L^{\beta\alpha}_{ij})$ が (39.9) と同様に分解するものを **semi-metric class** という．これは 1960 年に旦代が考えたものである．また，1946 年に河口自身が **submetric class** という概念を与えたが，これは，基本テンソル $g_{ij}(x,p)$ の存在を仮定してしまうのである．この class の空間については接続の概念も考えられて，種々の性質がえられるようである．振率テンソルや曲率テンソルも定義されるから，これらのテンソルに関して特殊な空間も考えられる．

河口空間（高次空間）や面積空間の理論は，上述のように多くの困難をともない，高次空間の方はファイバーバンドルを用いる理論も展開されているが，まだ軌道に完全に乗ったといえる段階ではないとみられる．しかし，これらの微分幾何学も，物理学や種々の工学の発展にとっては有力な数学的基礎を与えるものであるから，今後の発展が期待されねばならないのである．

5 フィンスラー幾何学

前章では，Finsler, Berwald, Cartan の仕事を通じてフィンスラー幾何学をみてきた．この最後の章では，この幾何学を一般的な基礎から再建することを考えよう．現在ではファイバーバンドルを用いて基礎づけをするのがよく，すでに多くの著者がこれを行っているが，そのためには多くの準備を必要とするので，ここでは古典的に，すなわち幾何的偏微分法を考えることによって行うことにする．この方法によれば，Busemann が皮肉たっぷりに評した“通過不可能にみえるテンソルの森”へ読者を案内せざるをえなくなるが，優れた着想によって Berwald や Cartan の運転する高速列車に突然乗せられてとまどいした読者に，時刻表を十分検討する余裕を与えることができると思う．

Cartan の流儀がいかに優れているかは以下において益々明らかになるが，影響力が大きすぎたために，公害も大きかったと言わざるをえない．Cartan のはあまりにもリーマン幾何的であった．人々はリーマン幾何流にしかフィンスラー幾何学を取扱えなくなってしまった．それが誤りだとはいえないが，たしかに偏向してはいる．これに気付いたのは Busemann と Rund であった．彼らの 1950 年頃からの仕事は，フィンスラー幾何学を Cartan 流から救い上げた．こうして多くの重要な問題が認められ，あるいは解かれ，あるいは解決不能ではないかと想像されている．それにしても，まだまだリーマン幾何流にしか考えない人々が多いのは嘆かわしいことである．

以下に現われるテンソルの中には，ファイバーバンドルの幾何学によって初めて幾何的意味がつけられるものがある．それが単にテンソル計算上現われたにすぎないようにみえるのは説明不十分の謗りをまぬがれない．その点では有名な Rund の本と同罪であるが，その本には書かれなかったいくつかの重要な面に注目して読まれるよう望む．

§ 40. 基本関数について

すでに述べたように，n 次元フィンスラー空間 F^n とは，n 次元微分可能多様体であって，その曲線 $x^i=x^i(t)$ の弧長 s が積分

$$s=\int_{t_1}^{t_2}L\left(x(t),\frac{dx}{dt}\right)dt \tag{40.1}$$

で a priori に与えられたものである． ここに基本関数 $L(x,y)$ は $2n$ 変数

$x=(x^i), y=(y^i), (i=1,\cdots,n)$ の関数であって，微分可能条件の他にいくつかの条件をみたすとする．第1に

（I） **斉次性** これは

$$L(x,ky)=kL(x,y), \qquad k>0$$

である．すなわち，L は $y=(y^i)$ について正斉1次である．

積分 (40.1) において，曲線のパラメーター t を他のパラメーター u に変換すれば，（I）によって，

$$\int_{t_1}^{t_2} L\left(x, \frac{dx}{du}\frac{du}{dt}\right)dt=\int_{u_1}^{u_2} L\left(x, \frac{dx}{du}\right)du.$$

これは $du/dt>0$ のときに成り立つ．ゆえに，曲線をそのパラメーターの増加の方向に向きづけて，向きを変えない任意のパラメーターを用いて計算しても弧長 s は同じであるということになる．Finsler が登山道の時間計量を例にあげたように，フィンスラー計量は**有向**曲線の長さを与えるものである．

（II） **正則性** これは基本テンソル

(40.2) $$g_{ij}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 L^2}{\partial y^i \partial y^j}$$

を要素とする行列式 g が0でないということである．

したがって行列 (g_{ij}) は正則であり，逆行列 (g^{ij}) がある．リーマン幾何学においてテンソル g^{ij} の役割は重要であった．

幾何学的見地から，さらに条件を追加する場合もある．たとえば，弧長が負になっては困るから，$L(x,y)$ は任意の $y\neq(0)$ について**正値**であるとか，2次型式 $g_{ij}\lambda^i\lambda^j$ がふつうのリーマン計量の場合のように**正定値**であるとか，さらに Riemann が考えたように**対称** $(L(x,-y)=L(x,y))$ であるとか等である．確かに，基準面 $L(x,y)=1$ (x は固定）の幾何学を考え，またこれを利用する場合には，基準面が凸閉曲面で，点 $y=(0)$ を内部に含むのが都合よく，さらに点 $y=(0)$ が基準面の中心になっているとさらに都合がよい（§ 47 参照）．

しかし，必要なテンソルを導き，その性質を考えるのには，少くとも以下においては上記の条件（I），（II）で十分である．さらに特に物理学への応用の

点では，リーマン幾何学でもそうであったように，$g_{ij}\lambda^i\lambda^j$ の正定値性は明らかに障害になる．

例 5.1 2つのフィンスラー空間 $F^m, \bar{F}^n$ を考え，その基本関数をそれぞれ L, M とする．多様体の積 $F^m \times \bar{F}^n$ にフィンスラー計量 $L+M$ を与えれば，$m+n$ 次元フィンスラー空間がえられる．$L(x,y)$ は $y \neq (0)$ で微分可能，$M(\bar{x},\bar{y})$ も $\bar{y} \neq (0)$ で微分可能としても，

$$L' = L + M$$

は $(y,\bar{y}) \neq (0,0)$ で微分可能とはならない．なんとなれば，

$$(y^1, \cdots, y^m, \bar{y}^1, \cdots, \bar{y}^n) = (0, \cdots, 0, \bar{y}^1, \cdots, \bar{y}^n)$$

は一般に $(0,0)$ ではないが，そこでは L が微分可能ではないから．たとえば $n=m=2$ とすれば，§ 37 の定理により，$F^2, \bar{F}^2$ の曲率テンソル $S, \bar{S}$ は共に0であり，これから，4次元フィンスラー空間 $F^2 \times \bar{F}^2$ の曲率テンソル S は0であることがすぐわかる．したがって，§ 37 の Brickell の定理によって $F^2 \times \bar{F}^2$ は，L, M が対称なら，リーマン空間であるという変な結果がえられる．しかし，同定理の条件（i）が上記のようにこの場合は成り立たないので，Brickell の定理を適用したのが誤りである．（菊地重隆の1968年の結果）．

例 5.2 1941年にアメリカの物理学者 G. Randers は一般相対性理論において，

$$L(x,y) = \sqrt{a_{ij}(x)y^i y^j} + b_i(x)y^i$$

という興味あるフィンスラー計量を考えた．ここに $a_{ij}(x)dx^i dx^j$ はリーマン計量であり，$b_i(x)$ は共変ベクトル野で電磁場を表わす．基準面（34.1）は

$$a_{ij}X^i X^j = (1 - b_i X^i)^2$$

という2次超曲面である．ポーランドの物理学者 R. S. Ingarden は1957年に，この計量を応用して，電子顕微鏡について興味ある結果を与えた．

2次元の場合を考えよう．直交座標 $(X, Y) = (X^1, X^2)$ に関して基準線を特に

$$X^2 + aY^2 = (1 - bY)^2$$

としよう．

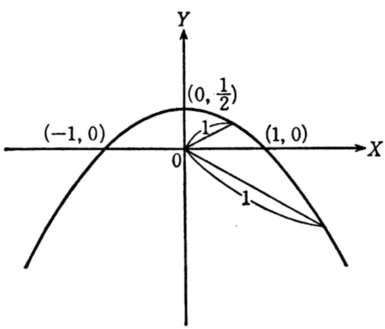
（i） $a=b=1$ とすれば，基準線は放物線

$$X^2 + 2Y = 1$$

となる．

この計量では原点 O からこの放物線上の点までのフィンスラー的な距離が1と定められている．Y 軸上の負の方向では距離が定義されていない．

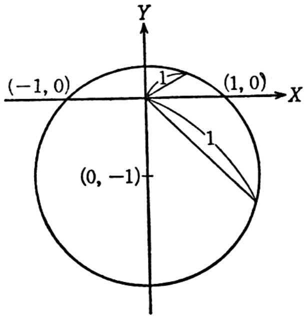
（ii） $a=2, b=1$ とすれば，基準線は円



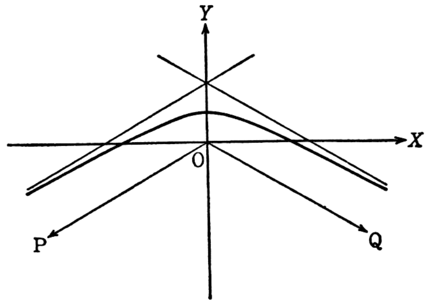
5-1 図

$$X^2+(Y+1)^2=2$$

で，中心は原点ではない．



5-2 図



5-3 図

(iii)　$a=1, b=2$ とすれば，基準線は双曲線

$$X^2-3\left(Y-\frac{2}{3}\right)^2=-\frac{1}{3}$$

であるが，$L=1$ だから，この双曲線の下半分である．したがって，原点を通って漸近線に平行に引いた半直線 OP, OQ と，これらにはさまれた部分の方向については，距離は定義されない．

§ 37 の Brickell, Deicke の定理では，すべての y について L が定義され，$L>0$ で，$g_{ij}\lambda^i\lambda^j$ が正定値であるとする．したがって基準面が凸閉曲面であるものにしか適用できない．しかし，基準面が凸閉曲面ではない Randers の計量についても，以下で与える曲率テンソル，捩率テンソルは，L が何回か微分可能であるような y については考えられること明らかである．

§ 41.　一般のフィンスラー接続

Cartan は公理系によって，Berwald は測地線の方程式によって，それぞれ接続を決定してフィンスラー幾何学を展開したが，ここでは，もっと一般に，接続はどのようであるべきかを，偏微分法を修正して共変微分法を作るという立場で，いわば一般のフィンスラー接続を考えてみよう．その中で Cartan や Berwald，その他の接続を位置づけることによって，その特徴が一層よくつかめるはずである．

n 次元フィンスラー空間 F^n では，g_{ij} や C_{ijk} のように，ベクトルやテンソルの成分は x^k と y^k の関数である．したがって反変ベクトル $u^i(x,y)$ の微係数といっても，x^k, y^k での微係数が考えられる．すでに § 35 で述べたように，スカラー $f(x,y)$ について (35.11) を求めた．そこでは $G_j{}^k{}_i$ という量が現われるが，それは単に

$$y^j \frac{\partial^2 \bar{x}^a}{\partial x^j \partial x^i} = y^j G_j{}^k{}_i \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^k} - \left(y^j \frac{\partial \bar{x}^b}{\partial x^j}\right) \bar{G}_b{}^a{}_c \frac{\partial \bar{x}^c}{\partial x^i}$$

という変換式を利用したにすぎない．したがって，もし $y^j G_j{}^k{}_i$ のように

$$y^j \frac{\partial^2 \bar{x}^a}{\partial x^j \partial x^i} = N^k{}_i \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^k} - \bar{N}^a{}_c \frac{\partial \bar{x}^c}{\partial x^i} \tag{41.1}$$

という変換式をみたす n^2 個の関数 $N^k{}_i(x,y)$ があれば，(35.11) のように

$$\frac{\delta}{\delta x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k} - N^i{}_k \frac{\partial}{\partial y^i} \tag{41.2}$$

という微分作用素は有効で，スカラー f に対して，

$$f_{|i} = \frac{\delta f}{\delta x^i} \tag{41.3}$$

は (0,1)-テンソルの成分を定義するであろう． リーマン幾何学においては，クリストフェルの記号 $\Gamma_j{}^k{}_i(x)$ から作られる量 $y^j \Gamma_j{}^k{}_i$ が変換式 (41.1) をみたし，それは y^j の 1 次式である．一般に (41.1) をみたす $N^k{}_i(x,y)$ は y^j に就て 1 次式であるとは限らないので， これを **非線形接続の係数** という．

反変ベクトル $u^i(x,y)$ を考えよう．

$$\bar{u}^a = u^i \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i}.$$

(35.9) に注意して

$$\frac{\partial \bar{u}^a}{\partial \bar{x}^b} = \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^b} + \frac{\partial u^i}{\partial y^j}\frac{\partial y^j}{\partial \bar{x}^b}\right)\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i} + u^i \frac{\partial^2 \bar{x}^a}{\partial x^i \partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^b}$$

$$= \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^b} + \frac{\partial u^i}{\partial y^j}\bar{y}^c \frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^c \partial \bar{x}^b}\right)\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i} + u^i \frac{\partial^2 \bar{x}^a}{\partial x^i \partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^b}.$$

ここへ (41.1) を用いて

$$=\left\{\frac{\partial u^i}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^b}+\frac{\partial u^i}{\partial y^j}\left(\bar{N}^c{}_b\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^c}-N^j{}_k\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^b}\right)\right\}\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i}+u^i\frac{\partial^2 \bar{x}^a}{\partial x^i \partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^b}.$$

ここで $\partial u^i/\partial y^j$ がテンソルであること，すなわち

$$\frac{\partial u^i}{\partial y^j}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^c}\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i}=\frac{\partial \bar{u}^a}{\partial \bar{y}^c}$$

に着目すれば，上式は (41.2) により

$$\frac{\delta \bar{u}^a}{\delta \bar{x}^b}=\frac{\delta u^i}{\delta x^j}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^b}\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i}+u^i\frac{\partial^2 \bar{x}^a}{\partial x^i \partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^b}$$

と書ける．したがって (13.5) を導いたときの偏微分 $\partial/\partial \bar{x}^b$ がここでは $\delta/\delta \bar{x}^b$ に代っている．ゆえに (13.4) と同様の

$$\bar{F}_a{}^c{}_b\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^c}=F_i{}^k{}_j\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^b}+\frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar{x}^a \partial \bar{x}^b} \tag{41.4}$$

という変換式をみたす n^3 個の量 $F_i{}^k{}_j(x,y)$ があれば，(13.5) と同様の

$$u^i{}_{|j}=\frac{\delta u^i}{\delta x^j}+u^k F_k{}^i{}_j \tag{41.5}$$

は (1,1)-テンソルの成分である．この $F_k{}^i{}_j(x,y)$ を **V 接続の係数**という．(この名前のいわれはファイバーバンドルによる理論にある)．

以上を要するに，非線形接続 $N^i{}_j(x,y)$ と V 接続 $F_j{}^i{}_k(x,y)$ を与えることによって，**x^k に関する一般の共変微分法** (41.5) がえられる．

ここで 1 つの注意をしよう．変換式 (41.1) は，変換式 (41.4) に $\bar{y}^a$ を掛けてえられるものと同じ形をしているから，

$$D^i{}_j=y^k F_k{}^i{}_j-N^i{}_j \tag{41.6}$$

は (1,1)-テンソルを与えることがわかる．これを**偏向テンソル**という．

次に **y^i に関する一般の共変微分法**は，単なる偏微係数

$$u^i{}_{\|j}=\frac{\partial u^i}{\partial y^j} \tag{41.7}$$

でもテンソルを与えるが，ある量 $C_k{}^i{}_j$ を用いて

(41.8) $$u^i|_j = \frac{\partial u^i}{\partial y^j} + u^k C_k{}^i{}_j$$

と共変微分法らしい形に修正しておこう．そうすれば，

$$u^i|_j - u^i{}_{\|j} = u^k C_k{}^i{}_j$$

で，左辺はテンソルであるから，$C_k{}^i{}_j$ は (1,2)-テンソルであることに注意しよう．

上のように，(41.4), (41.1) をみたす関数 $F_j{}^i{}_k(x,y)$, $N^i{}_j(x,y)$ と，(1,2)-テンソル $C_j{}^i{}_k(x,y)$ を与えれば，x^i に関する共変微分法 (41.5) と，y^i に関する共変微分法 (41.8) が定まるので，組 $(F_j{}^i{}_k, N^i{}_j, C_j{}^i{}_k)$ を**フィンスラー接続**ということにしよう．

この一般なフィンスラー接続 $F\Gamma$ について，その曲率と捩率を定義しよう．そのためには，リーマン空間におけるリッチの公式 (26.4′) と同様の公式を考えるのがよい．ただし，ここでは x^i, y^i に関する共変微分法があるので，**リッチの公式**は次のように3つある．

(41.9) $$u^i{}_{|j|k} - u^i{}_{|k|j} = u^r R_r{}^i{}_{jk} - u^i{}_{|r} T_j{}^r{}_k - u^i|_r R_j{}^r{}_k,$$

(41.10) $$u^i{}_{|j}|_k - u^i|_{k|j} = u^r P_r{}^i{}_{jk} - u^i{}_{|r} C_j{}^r{}_k - u^i|_r P_j{}^r{}_k,$$

(41.11) $$u^i|_j|_k - u^i|_k|_j = u^r S_r{}^i{}_{jk} \qquad - u^i|_r S_j{}^r{}_k.$$

これを (26.4′) と比較すれば，

$R_r{}^i{}_{jk}$, $P_r{}^i{}_{jk}$, $S_r{}^i{}_{jk}$ …**曲率テンソル**，

$T_j{}^r{}_k$, $R_j{}^r{}_k$, $C_j{}^r{}_k$, $P_j{}^r{}_k$, $S_j{}^r{}_k$…**捩率テンソル**

がえられたことがわかる．$C_j{}^r{}_k$ は (41.8) の中のものと同じである．

さて，3つのリッチの公式を導く証明は，単なる計算にすぎないので省略するが，ここにえられた8つのテンソルの成分を表わす式が必要であり，またいくつかの注意も述べるべきであろう．

まず，(41.11) の右辺に $u^i{}_{|r}$ を含む項が現われないのはなぜか．それは，(41.8) からわかるように，(41.11) の左辺に x^i による微分が含まれないからである．そうして，(26.3), (24.3) の場合とまったく同様に

(41.12) $$S_r{}^i{}_{jk} = \mathfrak{S}_{jk}\left\{\frac{\partial C_r{}^i{}_j}{\partial y^k} + C_r{}^s{}_j C_s{}^i{}_k\right\},$$

(41.13) $$S_j{}^r{}_k = \mathfrak{S}_{jk}\{C_j{}^r{}_k\}$$

がえられよう.

次に (41.10) をみよう. たとえばスカラー $f(x, y)$ について

$$f_{|j} = \frac{\delta f}{\delta x^j},$$

$$f_{|j}|_k = \frac{\partial}{\partial y^k}\left(\frac{\delta f}{\delta x^j}\right) - \frac{\delta f}{\delta x^r} C_j{}^r{}_k$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial y^k \partial x^j} - \frac{\partial N^r{}_j}{\partial y^k}\frac{\partial f}{\partial y^r} - N^r{}_j \frac{\partial^2 f}{\partial y^k \partial y^r} - \frac{\delta f}{\delta x^r} C_j{}^r{}_k.$$

他方

$$f|_k = \frac{\partial f}{\partial y^k},$$

$$f|_{k|j} = \frac{\delta}{\delta x^j}\left(\frac{\partial f}{\partial y^k}\right) - \frac{\partial f}{\partial y^r} F_k{}^r{}_j$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial y^k} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^k \partial y^r} N^r{}_j - \frac{\partial f}{\partial y^r} F_k{}^r{}_j.$$

こうして

$$f_{|j}|_k - f|_{k|j} = -f_{|r} C_j{}^r{}_k - f|_r\left(\frac{\partial N^r{}_j}{\partial y^k} - F_k{}^r{}_j\right).$$

したがって, (41.10) の右辺の第2項に, テンソルであった接続係数 $C_j{}^r{}_k$ が1つの振率テンソルとして登場することがわかり, さらに右辺の第3項にでてきた振率テンソル $P_j{}^r{}_k$ が

(41.14) $$P_j{}^r{}_k = \frac{\partial N^r{}_j}{\partial y^k} - F_k{}^r{}_j$$

で与えられることもわかる. 右辺の $F_k{}^r{}_j$ は一般には $F_j{}^r{}_k$ と等しくない.

(41.9) をみよう. やはりスカラー f について

$$f_{|j|k} = \frac{\delta}{\delta x^k}\left(\frac{\delta f}{\delta x^j}\right) - \frac{\delta f}{\delta x^r} F_j{}^r{}_k$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial f}{\partial x^j} - \frac{\partial f}{\partial y^r} N^r{}_j\right) - \frac{\partial}{\partial y^r}\left(\frac{\partial f}{\partial x^j} - \frac{\partial f}{\partial y^s} N^s{}_j\right) N^r{}_k - \frac{\delta f}{\delta x^r} F_j{}^r{}_k$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial y^r} N^r{}_j - \frac{\partial f}{\partial y^r} \frac{\partial N^r{}_j}{\partial x^k} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^r \partial x^j} N^r{}_k$$

$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial y^r \partial y^s} N^s{}_j N^r{}_k + \frac{\partial f}{\partial y^s} \frac{\partial N^s{}_j}{\partial y^r} N^r{}_k - \frac{\delta f}{\delta x^r} F_j{}^r{}_k.$$

これから

$$f_{|j|k} - f_{|k|j} = -\frac{\delta f}{\delta x^r}(F_j{}^r{}_k - F_k{}^r{}_j) - \frac{\partial f}{\partial y^r}\left(\frac{\delta N^r{}_j}{\delta x^k} - \frac{\delta N^r{}_k}{\delta x^j}\right)$$

がえられるから，(41.9) とくらべて

$$T_j{}^r{}_k = \mathfrak{S}_{jk}\{F_j{}^r{}_k\}, \tag{41.15}$$

$$R_j{}^r{}_k = \mathfrak{S}_{jk}\left\{\frac{\delta N^r{}_j}{\delta x^k}\right\} \tag{41.16}$$

がえられる．

以上により，5つの捩率テンソルはすべて調べられたが，(41.15)，(41.13) により，$T_j{}^r{}_k, S_j{}^r{}_k$ はリーマン空間の場合の (24.3) と同じく自然な形をしているが，他の $R_j{}^r{}_k, P_j{}^r{}_k$ は (41.16)，(41.14) により，まったく変な形をしていることがわかる．なお，$R_j{}^r{}_k$ は非線形接続の $N^i{}_j$ のみから作られていて，**非線形接続の曲率**ともいわれるのである．

上のようにスカラー f を考えただけでは，曲率を求めることができない．ベクトル u^i に関するリッチの公式を具体的に計算すれば，次の式がえられよう．

$$R_r{}^i{}_{jk} = \mathfrak{S}_{jk}\left\{\frac{\delta F_r{}^i{}_j}{\delta x^k} + F_r{}^s{}_j F_s{}^i{}_k\right\} + C_r{}^i{}_s R_j{}^s{}_k, \tag{41.17}$$

$$P_r{}^i{}_{jk} = \frac{\partial F_r{}^i{}_j}{\partial y^k} - \frac{\delta C_r{}^i{}_k}{\delta x^j} + F_r{}^s{}_j C_s{}^i{}_k - C_r{}^s{}_k F_s{}^i{}_j + C_r{}^i{}_s \frac{\partial N^s{}_j}{\partial y^k}. \tag{41.18}$$

これらを (26.3) と比較すれば，右辺の最後の項を除けば，リーマン空間の曲率テンソルの成分とほぼ同様に表わされていることに気がつくだろう． $P_r{}^i{}_{jk}$ の $\delta C_r{}^i{}_k/\delta x^j$ を共変微係数 $C_r{}^i{}_{k|j}$ におきかえて，

$$P_r{}^i{}_{jk} = \frac{\partial F_r{}^i{}_j}{\partial y^k} - C_r{}^i{}_{k|j} + C_r{}^i{}_s P_j{}^s{}_k \tag{41.18'}$$

という重要な式がえられる．この式では右辺の第1項以外は明らかにテンソルであるから，$\partial F_r{}^i{}_j/\partial y^k$ もテンソルであるという，リーマン幾何学だけではち

よっと気がつかない事実がえられる.

定曲率のリーマン空間を考える場合には，ビアンキの恒等式 (27.2) が本質的な役割を演じた. フィンスラー幾何学においてもこの種の恒等式は重要である. しかし一般のフィンスラー接続においては2種の共変微分法があり，3つの曲率テンソルがある. さらにリーマン幾何学では常に消えていた捩率テンソルが5つもある. したがって多くのビアンキ型の恒等式があるだろう. 実際，独立な 11 個の**ビアンキの恒等式**がえられ，それぞれの式がまた複雑であり，まさに Busemann のいわゆる "通過不可能な森" へ迷い込んだ観がある. ただし，以下において取扱うフィンスラー接続はいずれも

(41.19)　$$T_j{}^i{}_k=0, \qquad S_j{}^i{}_k=0$$

をみたす. すなわち，接続係数 $F_j{}^i{}_k$, $C_j{}^i{}_k$ は j, k について対称であるから，これを仮定して，ビアンキの恒等式を書くことにしよう. まずその第1群は

(41.20)　$$\mathfrak{S}_{jkl}\{R_j{}^i{}_{kl}-C_j{}^i{}_r R_k{}^r{}_l\}=0,$$

(41.21)　$$\mathfrak{S}_{jkl}\{R_j{}^i{}_{k|l}+P_j{}^i{}_r R_k{}^r{}_l\}=0,$$

(41.22)　$$\mathfrak{S}_{jkl}\{R_h{}^i{}_{jk|l}+P_h{}^i{}_{jr} R_k{}^r{}_l\}=0$$

である. (41.20) に共変微係数が現われないのは $T_j{}^i{}_k=0$ としたためである. これらは x^j, x^k, x^l による共変微分法に関してえられたものである.

ビアンキの恒等式の第2群は

(41.23)　$$\mathfrak{S}_{jk}\{C_k{}^h{}_{i|j}+C_j{}^h{}_r P_k{}^r{}_i-P_j{}^h{}_{ki}\}=0,$$

(41.24)　$$\mathfrak{S}_{jk}\{R_j{}^h{}_r C_k{}^r{}_i+P_j{}^h{}_r P_k{}^r{}_i+P_k{}^h{}_{i|j}\}+R_j{}^h{}_k|_i-R_i{}^h{}_{jk}=0,$$

(41.25)　$$\mathfrak{S}_{jk}\{R_l{}^h{}_{jr} C_k{}^r{}_i+P_l{}^h{}_{jr} P_k{}^r{}_i+P_l{}^h{}_{ki|j}\}+S_l{}^h{}_{ir} R_j{}^r{}_k+R_l{}^h{}_{jk}|_i=0$$

である. これらは x^j, x^k, y^i による共変微分法に関してえられたものである.

ビアンキの恒等式の第3群は

(41.26)　$$\mathfrak{S}_{jk}\{C_i{}^h{}_j|_k-C_r{}^h{}_k C_j{}^r{}_i\}-S_i{}^h{}_{jk}=0,$$

(41.27)　$$\mathfrak{S}_{jk}\{P_i{}^h{}_j|_k-P_k{}^h{}_{ij}-P_r{}^h{}_k C_i{}^r{}_j\}=0,$$

(41.28)　$$\mathfrak{S}_{jk}\{P_l{}^h{}_{ij}|_k-P_l{}^h{}_{rk} C_i{}^r{}_j-S_l{}^h{}_{rk} P_i{}^r{}_j\}+S_l{}^h{}_{jk|i}=0$$

であり，y^j, y^k, x^i による共変微分法に関してえられたものである. (41.26) は捩率 $C_j{}^i{}_k$ に関するビアンキの恒等式であるが，$S_j{}^i{}_k=0$ としたので $S_i{}^h{}_{jk}$

の定義式 (41.12) と内容はまったく同じである.

最後の群は

(41.29) $$\mathfrak{S}_{jkl}\{S_j{}^h{}_{kl}\}=0,$$

(41.30) $$\mathfrak{S}_{jkl}\{S_i{}^h{}_{jk}|_l\}=0$$

であり, これらは y^j, y^k, y^l による共変微分法に関するものである. (41.30) はリーマン空間の場合の (27.2) と同じ形をしている. (41.29) は (26.8′) に似ており, 共変微分を含まないが, 全部を書けば

$$\mathfrak{S}_{jkl}\{S_j{}^h{}_{kl}-S_j{}^h{}_r S_k{}^r{}_l-S_j{}^h{}_k|_l\}=0$$

であり, ふつうのアフィン接続の理論の場合に現われる式である.

§ 42. 3つの特徴的なフィンスラー接続

すでに § 33, § 36 で Cartan の接続 $C\Gamma$ を説明した. ところで, 上のように一般なフィンスラー接続 $F\Gamma$ を考え, Cartan が基本テンソル g_{ij} をさえも公理によって決定しようとした努力を無視して, 天降り式に (33.7) で g_{ij} を定義すれば, $C\Gamma$ は次のように特徴づけられる.

$F\Gamma$ であって,

(I) **計量的である:** $g_{ij|k}=0,\quad g_{ij}|_k=0,$

(II) **捩率テンソル** $T_j{}^i{}_k,\ S_j{}^i{}_k$ **は0である.**

(III) **偏向テンソル** $D^i{}_j$ **は0である.**

をみたすものは一意に定まる. これを $C\Gamma$ とする.

これら3つの仮定は大変美しい. というのは, (I) は § 25 の仮定 (I) に相当し, (41.15), (41.13) により, (II) は § 25 の仮定 (II) に相当する. したがって $C\Gamma$ はリーマン接続とまったく似ている. 仮定 (III) は (41.6) により, 接続係数 $(F_j{}^i{}_k, N^i{}_j, C_j{}^i{}_k)$ のうち, $N^i{}_j$ が

(42.1) $$N^i{}_j=F_0{}^i{}_j(=y^kF_k{}^i{}_j)$$

によって与えられるということである. 一般の $F\Gamma$ は V 接続 $F_j{}^i{}_k$ と非線形接続 $N^i{}_j$ ともう1つの接続 $C_j{}^i{}_k$ という3つの複合であるが, $C\Gamma$ では (42.1) により, V 接続から非線形接続を決定してしまい, 接続の要素を1つ減らし

たのである.

しかしそのゆえに， Cartan の理論では非線形接続が表面には現われず， フィンスラー幾何学における非線形接続の重要さに人々が気がつかないことになってしまった. 戦後になってドイツの若い人々，Barthel や Laugwitz によってようやくこのことが認識されたが，1956 年に発表された河口商次の論文によって初めて十分に明らかになったといえよう. ただし，Berwald はこのことに初めから気がついていたのだと言えなくもないが.

さて，(I),(II),(III) によって $C\Gamma$ を決定してみよう.

$$g_{ij}|_k=\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k}-g_{rj}C_i{}^r{}_k-g_{ir}C_j{}^r{}_k=0,$$

$$C_{ijk}=C_{kji}$$

であるから，§ 25 とまったく同様にして

(42.2)
$$C_{ijk}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k}+\frac{\partial g_{jk}}{\partial y^i}-\frac{\partial g_{ki}}{\partial y^j}\right).$$

しかし (34.3) から，$\partial g_{ij}/\partial y^k$ は i,j,k について対称だから，

(42.2′)
$$C_{ijk}=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k}$$

ゆえに (36.7) がえられた.

次に

$$g_{ij|k}=\frac{\delta g_{ij}}{\delta x^k}-g_{rj}F_i{}^r{}_k-g_{ir}F_j{}^r{}_k=0,$$

$$F_{ijk}=F_{kji}.$$

これからは (36.11) から (36.13),･･･ とまったく同じ方法で，Cartan の F_{ijk} がえられるが，条件 (III) の役割をみるために，もう一度再現しよう.

(36.13) を導いて，これを具体的に

$$F_{ijk}=\gamma_{ijk}-C_{ijr}N^r{}_k-C_{jkr}N^r{}_i+C_{kir}N^r{}_j.$$

これは (41.6) により

(42.3)
$$F_{ijk}=\gamma_{ijk}-C_{ijr}F_0{}^r{}_k-C_{jkr}F_0{}^r{}_i+C_{kir}F_0{}^r{}_j+E_{ijk}.$$

ここに最後の E 項は

(42.4)
$$E_{ijk}=C_{ijr}D^r{}_k+C_{jkr}D^r{}_i-C_{kir}D^r{}_j.$$

すなわち，偏向テンソルを生かして計算してみよう．(42.3) より順次に

(42.5)　$$F_{0jk}=\gamma_{0jk}-C_{jkr}F_0{}^r{}_0+E_{0jk},$$

(42.6)　$$F_{0j0}=\gamma_{0j0}+E_{0j0}.$$

この F_{0j0} を (42.5) の $F_0{}^r{}_0=g^{rj}F_{0j0}$ へ代入して F_{0jk} がえられ，F_{0jk} を (42.3) の $F_0{}^r{}_k=g^{rj}F_{0jk}$ 等へ代入して F_{ijk} が求まる．

ところで E 項であるが，(42.4) より

(42.7)　$$E_{0jk}=C_{jkr}D^r{}_0, \qquad E_{0j0}=0$$

であることがわかるから，偏向テンソル $D^i{}_j$ を任意に与えることによって，条件 (I)，(II) により接続が一意に定まることがわかる．$D^i{}_j=0$ とすれば $C\Gamma$ がえられるのである．

$D^i{}_j=0$ は上記のように望ましい条件であるが，本当はどうでもよかった．そこで $D^i{}_j=\pm\delta^i_j$ としてもよいわけであるが，幾何的意味があるのか．$D^i{}_j=-\delta^i_j$ はファイバーバンドルの理論を用いて妥当な理由が無くはない（橋口正夫，1969)．

次に § 35 で説明した Berwald の接続 $B\Gamma$ を考えよう．上の Cartan の $C\Gamma$ について，すべて前節の一般記号を用いることにし，$B\Gamma$ については，右肩に (b) を付けて区別しよう．たとえば，接続係数は $(F^{(b)}{}_j{}^i{}_k, N^{(b)i}{}_k, C^{(b)}{}_j{}^i{}_k)$ と書く．Berwald は y^i についての共変微分法はすべて単なる (41.7) を用いた．したがって $C^{(b)}{}_j{}^i{}_k=0$ である．$F^{(b)}{}_j{}^i{}_k$ は (35.6) の $G_j{}^i{}_k$ であるが，これを $C\Gamma$ のように美しい条件によって定義するのは困難である．そこで $C\Gamma$ の量 $F_j{}^i{}_k, C_j{}^i{}_{k|0}$ を用いて次のようにする．

Berwald の接続 $\boldsymbol{B\Gamma}=(F^{(b)}{}_j{}^i{}_k, N^{(b)i}{}_k, C^{(b)}{}_j{}^i{}_k)$ とは，$C^{(b)}{}_j{}^i{}_k=0$ で，

(42.8)　$$F^{(b)}{}_j{}^i{}_k=G_j{}^i{}_k=F_j{}^i{}_k+C_j{}^i{}_{k|0},$$

(42.9)　$$N^{(b)i}{}_j=G^i{}_j=G_0{}^i{}_j$$

で与えられるものである．

(42.8) は (36.19′) にすぎない．(42.9) は再び偏向テンソル $D^{(b)i}{}_j=0$ を意味する．(42.8) より $G^i{}_j=F_0{}^i{}_j$ $(=N^i{}_j)$ がえられる．よって $C\Gamma$ と $B\Gamma$ は共通の非線形接続をもつ．

もう一つ Rund の接続 $\boldsymbol{R\Gamma}=(F^{(0)}{}_j{}^i{}_k, N^{(0)i}{}_j, C^{(0)}{}_j{}^i{}_k)$ を考えよう．これ

は $C\Gamma$ において単に $C_j{}^i{}_k=0$ としたもの $(F_j{}^i{}_k, N^i{}_j=F_0{}^i{}_j, 0)$ にすぎないから，$C^{(0)}{}_j{}^i{}_k=0$ である.

Hanno Rund はフィンスラー幾何学の唯一の本を 1959 年に書いた南アフリカ生まれのドイツ人. Rund は 1951 年に，(35.5) のクリストフェルの記号 $\gamma_j{}^i{}_k$ によって

$$P_j{}^i{}_k=\gamma_j{}^i{}_k-C_j{}^i{}_l\gamma_0{}^l{}_k$$

を定義し，これを用いて平行移動を定義した. その論文は Cartan の枠からようやく脱した，フィンスラー幾何学史の第 3 期の開始をつげる，ミンコウスキー的見地によるものであったが，論理が不十分である上に，この $P_j{}^i{}_k$ は j, k について対称でない. そこで彼は 1954 年に，

$$P^*{}_j{}^i{}_k=\gamma_j{}^i{}_k-C_k{}^i{}_lP_j{}^l{}_0-C_j{}^i{}_lP_k{}^l{}_0+C_{jkl}P_r{}^l{}_0g^{ir}$$

という修正をほどこして対称にしたが，これは A. Deicke, E. T. Davies が直ちに指摘したように，不幸にも Cartan の $F_j{}^i{}_k$ と同一のものであった. このことは

$$P_j{}^i{}_0=\gamma_j{}^i{}_0-C_j{}^i{}_l\gamma_0{}^l{}_0$$

と (36.14′), (42.3) (ただし，$E_{ijk}=0$) により明らかである. しかし Rund がフィンスラー幾何学を局所ミンコウスキー幾何学として考えるべきであると繰返し主張したことは，成果はとにかく，大きな功績であるといわなければならない (§ 47 参照).

以上を要するに，$C\Gamma, B\Gamma, R\Gamma$ を表にすれば次のようである.

	$F_j{}^i{}_k$	$N^i{}_j$	$C_j{}^i{}_k$
$C\Gamma$	(36.13)	$G^i{}_j$ (36.18)	(35.3)
$R\Gamma$	$C\Gamma$ の $F_j{}^i{}_k$	$C\Gamma$ の $N^i{}_j$	0
$B\Gamma$	$G_j{}^i{}_k$ (35.6)	$C\Gamma$ の $N^i{}_j$	0

これらが共通の非線形接続 $N^i{}_j$ をもつことに注目しよう. また，$B\Gamma$ において $C_j{}^i{}_k$ を生かした接続 $(G_j{}^i{}_k, G^i{}_j, C_j{}^i{}_k)$ も考えられる（橋口正夫，1969）が，著しい性質といって特にない.

§ 43. $C\Gamma$, $B\Gamma$, $R\Gamma$ の曲率と捩率

一般のフィンスラー接続 $F\Gamma$ について，特に y^i は

$$y^i{}_{|j}=\frac{\partial y^i}{\partial x^j}-\frac{\partial y^i}{\partial y^r}N^r{}_j+y^rF_r{}^i{}_j,$$

$$y^i|_j=\frac{\partial y^i}{\partial y^j}+y^rC_r{}^i{}_j.$$

すなわち

(43.1) $$y^i{}_{|j} = D^i{}_j, \qquad y^i|_j = \delta^i_j + C_0{}^i{}_j$$

をみたす.

さて，Cartan の $C\Gamma$ を考えよう．そこでは

$$y^i{}_{|j} = 0, \qquad y^i|_j = \delta^i_j$$

である．また一般に $\delta^i_{j|k} = \delta^i_j|_k = 0$ は明らかである． ゆえにリッチの公式 (41.9), (41.10), (41.11) を y^i に適用して

(43.2) $$R_0{}^i{}_{jk} = R_j{}^i{}_k, \qquad P_0{}^i{}_{jk} = P_j{}^i{}_k, \qquad S_0{}^i{}_{jk} = 0$$

がえられる．§41 で，捩率 $T_j{}^i{}_k, S_j{}^i{}_k$ は捩率らしい形をしているが，$R_j{}^i{}_k, P_j{}^i{}_k$ は変な形をしていることをみたが， $C\Gamma$ では $R_j{}^i{}_k, P_j{}^i{}_k$ は曲率テンソルから導かれるのである．したがって Cartan 自身は $C_j{}^i{}_k$ だけを捩率とよんだ.

(43.2) によって，$C\Gamma$ に関するビアンキの恒等式のうち，(41.21) は (41.22) に y^h を掛けてえられ，同様に (41.25) から (41.24) が，(41.28) から (41.27) がそれぞれえられることが示されよう.

次にリッチの公式を基本テンソル g_{ij} に適用し， $C\Gamma$ が計量的であることを用いて

(43.3) $$R_{ijkl} = -R_{jikl}, \qquad P_{ijkl} = -P_{jikl}, \qquad S_{ijkl} = -S_{jikl}$$

がえられる．ところが定義から明らかなように，

(43.4) $$R_{ijkl} = -R_{ijlk}, \qquad S_{ijkl} = -S_{ijlk}$$

が成り立つ.

S_{ijkl} についてもっと詳しく調べよう．これは上に示したように，i と j，また k と l について反対称である．しかも (41.29) も成り立つ．したがって §26 で述べた恒等式の完全系の話におけるように，

$$S_{ijkl} = S_{klij}$$

も成り立つ．しかしこれは当然である．というのは，(42.2) により，$C_j{}^i{}_k$ は点 x を固定して y^i だけを変数とみた，したがって点 x における接空間 M_x に導入されたリーマン計量

$$g_{ij}(x, y)dy^i dy^j$$

のクリストフェルの記号であり，(41.12) により，このリーマン計量の曲率テンソルが S_{ijkl} にほかならないからである (§ 46 参照).

それだけではなく，特に (42.2′) によって，

$$S_{ijkl} = C_{ilr}C_j{}^r{}_k - C_{ikr}C_j{}^r{}_l \tag{43.5}$$

と，$C_j{}^i{}_k$ の微係数は含まれないのである．というのは，

$$\begin{aligned} S_{ijkl} = g_{jh}S_i{}^h{}_{kl} &= g_{jh}\mathfrak{S}_{kl}\left\{\frac{\partial C_i{}^h{}_k}{\partial y^l} + C_i{}^r{}_kC_r{}^h{}_l\right\} \\ &= \mathfrak{S}_{kl}\left\{\frac{\partial}{\partial y^l}(g_{jh}C_i{}^h{}_k) - \frac{\partial g_{jh}}{\partial y^l}C_i{}^h{}_k + C_i{}^r{}_kC_{rjl}\right\} \\ &= \mathfrak{S}_{kl}\left\{\frac{\partial C_{ijk}}{\partial y^l} - 2C_{jrl}C_i{}^r{}_k + C_i{}^r{}_kC_{rjl}\right\}. \end{aligned}$$

第1項は消えるからである．

R_{ijkl} については，(41.29) のように簡単ではない式 (41.20) が成り立つ．ゆえに $R_{ijkl} = R_{klij}$ も成り立たず，もっと複雑になる．

次に $C\Gamma$ の $P_j{}^i{}_k$ と $P_i{}^h{}_{jk}$ を調べよう．ビアンキの恒等式 (41.23) はまた

$$C_{hik|j} - C_{hij|k} + C_{hjr}P_k{}^r{}_i - C_{hkr}P_j{}^r{}_i - P_{jhki} + P_{khji} = 0$$

とも表わせる．これから j, h, k を循環してえられる2式の，第1式を加え，第2式を引けば，(43.3) の第2式を用いて

$$P_{hkji} = C_{kij|h} - C_{hij|k} + C_{hjr}P_k{}^r{}_i - C_{kjr}P_h{}^r{}_i \tag{43.6}$$

がえられる．これに y^h を掛けて (43.2) の第2式により

$$P_{kji} = C_{kij|0} - C_{kjr}P_0{}^r{}_i.$$

さらに y^k を掛けて $P_{0ji} = 0$ $(P_0{}^j{}_i = 0)$ となるから，

$$P_{kij} = C_{kij|0} \tag{43.7}$$

がえられる．こうして，(43.6), (43.7) によって，曲率，捩率の P は共に捩率 C_{ijk} とその共変微係数 $C_{ijk|h}$ で表わされることがわかる．$C\Gamma$ と $B\Gamma$ の差である $C_{ijk|0}$ は，実は $C\Gamma$ の捩率 P_{ijk} であったわけである．

次に Berwald の接続 $B\Gamma$ について考えよう．$C^{(b)}{}_j{}^i{}_k = 0$ であるから，(41.12), (41.13) により $S^{(b)}{}_r{}^i{}_{jk} = 0$, $S^{(b)}{}_j{}^r{}_k = 0$ である．$F^{(b)}{}_j{}^i{}_k = G_j{}^i{}_k$ の対称性により $T^{(b)}{}_j{}^r{}_k = 0$ である．しかし特に著しい性質は次のようである．

まず，$G^i(x,y)$ は（35.2）により y^j について2次の正斉次であるから，(35.6) により

$$y^j G_j{}^i{}_k = G^i{}_k = \frac{\partial G^i}{\partial y^k}.$$

したがって（42.9),(41.6）により，$D^{(b)i}{}_j=0$ であるが，(41.14）により

$$P^{(b)}{}_j{}^r{}_k = \frac{\partial G^r{}_j}{\partial y^k} - G_k{}^r{}_j = \frac{\partial}{\partial y^k}(y^s G_s{}^r{}_j) - G_k{}^r{}_j$$

$$= G_k{}^r{}_j + y^s \frac{\partial G_s{}^r{}_j}{\partial y^k} - G_k{}^r{}_j.$$

ところで，$G_j{}^r{}_k$ は正斉0次だから，

$$y^s \frac{\partial G_s{}^r{}_j}{\partial y^k} = y^s \frac{\partial G_k{}^r{}_j}{\partial y^s} = 0.$$

ゆえに

$$P^{(b)}{}_j{}^r{}_k = 0. \tag{43.8}$$

したがって振率 $P^{(b)}{}_j{}^r{}_k$ も消える．これは $G_j{}^i{}_k$ が，(35.6）のように，単に偏微分して定義されたことが原因である．

こうして，$B\Gamma$ においては，3つの曲率のうちの2つ $R^{(b)}{}_i{}^h{}_{jk}$ と $P^{(b)}{}_i{}^h{}_{jk}$，5つの振率のうちの1つ $R^{(b)}{}_i{}^h{}_j$ だけが生き残ったのである．ところが $R^{(b)}{}_i{}^h{}_{jk}$ も実は大変簡単なのである．ビアンキの恒等式（41.24）は単に

$$R^{(b)}{}_j{}^h{}_k|_i - R^{(b)}{}_i{}^h{}_{jk} = 0$$

となるが，$B\Gamma$ では，$|_i$ は単に y^i で偏微分するだけであるから，

$$R^{(b)}{}_i{}^h{}_{jk} = \frac{\partial R^{(b)}{}_j{}^h{}_k}{\partial y^i}. \tag{43.9}$$

すなわち，振率 $R^{(b)}{}_j{}^h{}_k$ を偏微分すれば曲率 $R^{(b)}{}_i{}^h{}_{jk}$ がえられる．

さらに，(43.9）と，$R^{(b)}{}_j{}^h{}_k$ が y^i について正斉1次であることから，

$$R^{(b)}{}_0{}^h{}_{jk} = R^{(b)}{}_j{}^h{}_k \tag{43.10}$$

という，$C\Gamma$ の場合と同様の式がえられるが，$B\Gamma$ については（41.20）は

$$\mathfrak{S}_{jkl}\{R^{(b)}{}_j{}^i{}_{kl}\} = 0 \tag{43.11}$$

と，(26.8′）と同じ形の恒等式になる．これらを用いて，

$$\mathfrak{S}_{jk}\left\{\frac{\partial R^{(b)}{}_0{}^h{}_k}{\partial y^j}\right\}=\mathfrak{S}_{jk}\left\{R^{(b)}{}_j{}^h{}_k+y^r\frac{\partial R^{(b)}{}_r{}^h{}_k}{\partial y^j}\right\}$$
$$=2R^{(b)}{}_j{}^h{}_k+\mathfrak{S}_{jk}\{R^{(b)}{}_j{}^h{}_{0k}\}$$
$$=2R^{(b)}{}_j{}^h{}_k+y^rR^{(b)}{}_r{}^h{}_{jk}.$$

ゆえに

(43.12) $$R^{(b)}{}_j{}^h{}_k=\frac{1}{3}\mathfrak{S}_{jk}\left\{\frac{\partial R^{(b)}{}_0{}^h{}_k}{\partial y^j}\right\}.$$

このようにテンソル $R^{(b)}{}_0{}^h{}_k$ を単に順次偏微分することによって，捩率テンソル $R^{(b)}{}_j{}^h{}_k$，曲率テンソル $R^{(b)}{}_i{}^h{}_{jk}$ がえられるという著しい性質がえられる．Berwald は $R^{(b)}{}_0{}^h{}_k$ を**偏差テンソル**，$R^{(b)}{}_j{}^h{}_k$ を**曲率の基本テンソル**，$R^{(b)}{}_i{}^h{}_{jk}$ を**曲率テンソル**と名づけた．

残った $P^{(b)}{}_i{}^h{}_{jk}$ は，(41.18′) により単に

(43.13) $$P^{(b)}{}_i{}^h{}_{jk}=\frac{\partial G_i{}^h{}_j}{\partial y^k}$$

にすぎない．

最後に Rund の接続 $R\Gamma=(F_j{}^i{}_k, F_0{}^i{}_j, 0)$ をみよう．これは $C\Gamma$ で $C_j{}^i{}_k$ を 0，すなわち共変微分 $|_j$ を単に $\partial/\partial y^j$ でおきかえたものにすぎない．したがって，$C\Gamma$ の場合における諸公式で $C_j{}^i{}_k=0$ とおけば，大体において $R\Gamma$ の公式がえられよう．捩率の中で，$T_j{}^i{}_k, R_j{}^i{}_k, P_j{}^i{}_k$ はそれぞれ(41.15)，(41.16)，(41.14) によって $C_j{}^i{}_k$ を含まないから，$C\Gamma$ と $R\Gamma$ について共通であり，

$$T^{(0)}{}_j{}^i{}_k=0,\qquad S^{(0)}{}_j{}^i{}_k=0,$$
$$R^{(0)}{}_j{}^i{}_k=R_j{}^i{}_k,\qquad P^{(0)}{}_j{}^i{}_k=P_j{}^i{}_k.$$

ただし $P^{(0)}{}_j{}^i{}_k=P_j{}^i{}_k$ を誤解してはいけない．(43.7) において $C_{kij}=0$ とすれば明らかに $P^{(0)}{}_{kij}=0$ ではないか．そうではなく，一般式 (41.14) を用いたのである．$B\Gamma, R\Gamma$ では接続 $(F_j{}^i{}_k, N^i{}_j, C_j{}^i{}_k)$ の $C_j{}^i{}_k$ は消えているが，

$$C_{ijk}=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k}$$

が消えているのでなく，上式で定義できるテンソル C_{ijk} は接続に関係なく，0 ではないのである．

$S^{(0)}{}_h{}^i{}_{jk}=0$ であるが，(41.17) により

(43.14) $$R^{(0)}{}_r{}^i{}_{jk}=R_r{}^i{}_{jk}-C_r{}^i{}_s R_j{}^s{}_k$$

が成り立ち，$C\Gamma$ の $R_r{}^i{}_{jk}$ ではなく，$R\Gamma$ の $R^{(0)}{}_r{}^i{}_{jk}$ こそ (41.17) の右辺の第1項，したがって (26.3) と同様の形で定義される．さらに，(41.20) により

(43.15) $$\mathfrak{S}_{rjk}\{R^{(0)}{}_r{}^i{}_{jk}\}=0$$

が成り立つ．$R^{(0)}{}_r{}^i{}_{jk}$ は明らかに j と k について反対称であるが，

$$R^{(0)}{}_{rhjk}=g_{hi}R^{(0)}{}_r{}^i{}_{jk}$$

は r と h について反対称ではない．それは (43.14) からえられる

(43.16) $$R^{(0)}{}_{rhjk}=R_{rhjk}-C_{rhs}R_j{}^s{}_k$$

から明らかである．C_{rhs} は r,h について対称であるから．

最後に $P^{(0)}{}_i{}^h{}_{jk}$ であるが，これは (41.18) により

(43.17) $$P^{(0)}{}_r{}^i{}_{jk}=\frac{\partial F_r{}^i{}_j}{\partial y^k}$$

であり，$B\Gamma$ の場合の (43.13) と同様である．

以上の $C\Gamma, B\Gamma, R\Gamma$ の捩率と曲率を表で示そう．ここに上添字の1は捩率の R,P,S を，上添字の2は曲率の R,P,S を表わすものとする．

	T	C	R^1	P^1	S^1	R^2	P^2	S^2
$C\Gamma$	0	(42.2′)	(41.16) (43.2)	(41.14) (43.7)	0	(41.17)	(41.18) (43.6)	(43.5)
$R\Gamma$	0	0	$C\Gamma$ の R^1	$C\Gamma$ の P^1	0	(43.14)	(43.17)	0
$B\Gamma$	0	0	$C\Gamma$ の R^1	0	0	(43.9)	(43.13)	0

$C\Gamma$ は計量的である．$R\Gamma$ についても明らかに $g_{ij|k}=0$ である．しかし $R\Gamma, B\Gamma$ については

$$g_{ij}|_k=\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k}=2C_{ijk}$$

である．$B\Gamma$ については (42.8) により，その $g_{ij|k}$ を $g_{ij;k}$ と書けば，

(43.18) $$g_{ij;k}=-2C_{ijk|0}$$

が成り立つ．

§ 44.　特殊フィンスラー空間のある系列

種々の意味で特殊なフィンスラー空間を考えておくことが重要であるのは，リーマン幾何学における平坦空間，定曲率空間，アインシュタイン空間等の役割を思い出せば明らかであろう．そこで，フィンスラー空間であってある特徴をもつものを考えよう．

第1にはリーマン空間である．これは (34.4) により，(34.3) で与えられる基本関数 g_{ij} が y^i に依存しないことによって，したがって，(42.2′) により

$$(\mathcal{R})\qquad C_{ijk}=0$$

によって特徴づけられる．リーマン空間全体の集合を $\mathcal{R}$ とする．

それでは，g_{ij} が x^i に依存しない，すなわち

$$(44.1)\qquad \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}=0$$

という空間はどうであろう．そのような空間を**局所ミンコウスキー空間**といい，その集合を $\mathcal{M}$ としよう．

しかし，(44.1) のままでは具合が悪い．というのは，C_{ijk} はテンソルであるから，条件 ($\mathcal{R}$) はどんな座標についてもこれと同じ式であるが，(44.1) は座標の取り方に依存した条件式であり，別の座標系では一般に成立しない．したがって $\mathcal{M}$ を特徴づけるテンソル式がほしい．それは，$C\Gamma$ について

$$(\mathcal{M})\qquad R_{hijk}=0,\qquad C_{hij|k}=0$$

である．これを示そう．必要性は次のようである．(44.1) により (35.5) のクリストフェルの記号 $\gamma_j{}^i{}_k$ は 0 であり，(42.3), (42.5), (42.6) (ただし，$E_{ijk}=0$) により $F_j{}^i{}_k=0$, ゆえに $N^i{}_j(=F_0{}^i{}_j)=0$ であり，(41.16), (41.17) により $R_{hijk}=0$ となる．また

$$\frac{\delta C_j{}^i{}_k}{\delta x^h}=\frac{\partial C_j{}^i{}_k}{\partial x^h}-\frac{\partial C_j{}^i{}_k}{\partial y^r}N^r{}_h=\frac{\partial C_j{}^i{}_k}{\partial x^h},$$

ここに $g_{ij}(y)$ だから，g^{ij} も C_{ijk} も x^i に依存せず，よって上式は 0. これと $F_j{}^i{}_k=0$ から $C_j{}^i{}_{k|h}=0$ がえられる．

十分性を示そう．$C_{hij|k}=0$ より，(43.6)，(43.7) は $P_i{}^h{}_j=0$，$P_i{}^h{}_{jk}=0$ を与える．ゆえに (41.18′) は $F_r{}^i{}_j=F_r{}^i{}_j(x)$ を与える．また ($\mathscr{M}$) の第1式と (43.2) とから $R_j{}^i{}_k=0$ となり，(41.17) はいまや

$$R_r{}^i{}_{jk}=\frac{\partial F_r{}^i{}_j}{\partial x^k}-\frac{\partial F_r{}^i{}_k}{\partial x^j}+F_r{}^s{}_jF_s{}^i{}_k-F_r{}^s{}_kF_s{}^i{}_j=0$$

となる．$F_r{}^i{}_j$ は x^i のみの関数であるから，§ 18 の (18.5) 以下の理論をそのまま借用して，$\bar{F}_b{}^a{}_c=0$ となる座標 ($\bar{x}^a$) があることがわかる．したがってまた $C\Gamma$ では $\bar{N}^a{}_b=0$ も成り立ち，恒等式 $\bar{g}_{ab|c}=0$ は $\partial\bar{g}_{ab}/\partial\bar{x}^c=0$ となり，ゆえに (44.1) がこの座標で成り立つ．

n 次元実ベクトル空間 V に1つの基底をとれば，V のベクトル y はそれに関する成分 (y^i) で表わされる．V 上の関数 $L(y)$ が y について斉1次であるとし，さらに § 40 で述べた種々の条件を L がみたすとして，

$$L(y)=1$$

であるベクトル $y=(y^i)$ の長さを1と定義して，V に計量幾何学がえられる．これを**ミンコウスキー空間 V のミンコウスキー幾何学**という．

ところで，フィンスラー空間 M の点 p における接空間 M_{p} には，フィンスラー計量 $L(x,y)$ ((x^i)＝p は固定) によってミンコウスキー計量が定まる．したがって，M_{p} はミンコウスキー空間である．p が動けば，それにしたがってこのミンコウスキー空間も変化するから，M のフィンスラー幾何学とは，各点 p に応じてえられる M_{p} のミンコウスキー幾何学の総合であるとみられる (§ 47 参照)．

Cartan は接空間をユークリッド空間とみなして，点が動いたときに，それらの接続を考えた．これに対して，上の見方は H. Busemann が 1948 年に提唱し，§ 42 で述べたように，H. Rund がこの見地からフィンスラー空間の微分幾何学を展開したのである．しかし本当にこの見地から理論を展開したのは，§ 39 で述べた河口商次 (1956) であり，そこでは非線形接続が極めて重要である．§ 42 で述べたように，フィンスラー幾何学において非線形接続 ($N^i{}_j$) は大変重要であるが，それには長年気づかれなかったようである．その原因は，Cartan も Berwald も (41.6) の偏向テンソルを天降り式に0としたからであろう．このテンソル $D^i{}_j$ は 1970 年頃に著者等によって初めて取扱われたのではないかと思われる．

Hermann Minkowski (1864～1909) は，整数論において，格子と凸体という幾何的概念を考え，いわゆる数の幾何学を創始した (1910)．$L=1$ で与えられる基準面がこの凸体にあたる．彼は特殊相対性理論にも大きな功献をし，計量が

$$ds^2=c^2dt^2-dx^2-dy^2-dz^2$$

（c は光の速さ，t は時間，(x,y,z) は空間の点の座標）である正定値でないリーマン計量をもつ 4 次元空間もまた，ミンコウスキー空間とよばれている．

以上の組 $\mathcal{R},\mathcal{M}$ は，$g_{ij}(x,y)$ が独立変数 $x=(x^i), y=(y^i)$ を含むか否かについて考えられたものであり，いわば特殊フィンスラー空間の両極端であるといえる．ただし，リーマン空間ほどにはミンコウスキー空間はわかっていない．集合 $\mathcal{R}$ と $\mathcal{M}$ の共通部分 $\mathcal{R}\cap\mathcal{M}$ は，g_{ij} が x^k にも y^k にも依存しない，したがって定数であるという場合で，これは明らかに平坦空間である．

さて，もう少し一般な，特徴あるフィンスラー空間を考えよう．まず，Berwald がすでに 1926 年の論文で注目した，**アフィン接続をもつフィンスラー空間**がある．ここではそれを**ベアバルド空間**ということにしよう．その定義は，Berwald の接続 $B\Gamma$ における係数 $G_j{}^i{}_k$ (35.6) が，§ 24 の $\Gamma_j{}^i{}_k$ のように，x^i のみに依存するというもの，したがって

$$\frac{\partial G_i{}^h{}_j}{\partial y^k}=0 \tag{44.2}$$

である．これは接続 $B\Gamma$ では (43.13) により，1 つの曲率テンソル $P^{(b)}{}_i{}^h{}_{jk}$ が消えることを意味し，したがってテンソル式であるから，このままでよい．ただし，接続 $C\Gamma$ では

$$C_{hij|k}=0 \tag{$\mathcal{B}$}$$

と表わされることを示そう．ベアバルド空間全体を $\mathcal{B}$ とする．

アフィン接続をもつフィンスラー空間の概念は，上記のように，1926 年に述べられたが，1928 年のボロニアにおける講演で，その条件が $C_{hij|k}=0$ （$_{|k}$ は $B\Gamma$ に関するもの）であると述べられた．上の ($\mathcal{B}$) の形に書かれたのは遺稿の一つにおいてである．ところが Cartan は 1934 年にすでに上の条件 ($\mathcal{B}$) を与えているが，証明は発表されていない．同時に ($\mathcal{M}$) も与えられたが証明はない．Rund は 1959 年に書いた本で，($\mathcal{B}$) の十分性の証明を書いたが，必要性は証明せず，脚注に次のように書いた．

Berwald の遺稿 (1946) 参照．証明は難しくはないが少し長い．G^i の y^j による 3 次，4 次の微係数の 1 次結合で $C_{hij|k}$ を表わすことができることを利用して証明される．同じ定理を Wagner が 1949 年に少し変った形で取扱ったが，その証明は基準面のアフィン微分幾何学に基づいている．

以下の証明も少し長すぎるのであろうか．

まず (42.8) によって (44.2) は

$$\frac{\partial F_i{}^h{}_j}{\partial y^k}+\frac{\partial C_i{}^h{}_{j|0}}{\partial y^k}=0 \tag{44.3}$$

と書ける．この第1項を（41.18′）によって書きかえ，g_{lh} を掛けて上添字 h を降ろして l にする．第2項については，（43.7）と

$$g_{lh}P_i{}^h{}_{j\|k}=P_{ilj\|k}-2C_{lkh}P_i{}^h{}_j, \quad (\,_{\|k}=\partial/\partial y^k),$$

に注意して，条件式は

$$P_{iljk}+C_{ilk|j}-C_{ilr}P_j{}^r{}_k+P_{ilj\|k}-2C_{lkr}P_i{}^r{}_j=0. \tag{44.4}$$

ここで i,l,j を循環させて，（43.6）からえられる恒等式

$$\mathfrak{S}_{hkj}\{P_{hkji}\}=0 \tag{44.5}$$

を用いて

$$3P_{ilj\|k}+\mathfrak{S}_{ilj}\{C_{ilk|j}-C_{ilr}P_j{}^r{}_k-2C_{lkr}P_i{}^r{}_j\}=0 \tag{44.6}$$

がえられる．これに y^l を掛ければ

$$\begin{aligned}3P_{ilj\|k}y^l+C_{jik|0}&=-3P_{ikj}+C_{jik|0}\\&=-2C_{ikj|0}=0,\end{aligned}$$

すなわち（43.7）により $P_{ikj}=0$ となる．いまや（44.4）は最初の2項だけになり，（43.6）からえられる $P_{iljk}=C_{ljk|i}-C_{ijk|l}$ とからすぐ（$\mathscr{B}$）がえられる．（44.4）は条件（44.2）そのものであるから，十分性も示された．

上にも述べたソ連の V. V. Wagner (Vagner, ただし最近の著者への手紙には Wagner と書かれている) は独自の立場からフィンスラー幾何学を建設した人であるが，若い時 (1938) に $\mathscr{B}$ の幾何的研究を発表した．また 1943 年には**一般化されたベアバルド空間**という概念を与えたが，これは，$F_j{}^i{}_k-F_k{}^i{}_j=T_j{}^i{}_k$ が 0 でなくて，$F_j{}^i{}_k$ が y^h に依存しないという接続が定義される空間のことである． Wagner 自身はただ2次元のときにだけ特徴づけを行った．

なお，$B\Gamma$ の $G_j{}^i{}_k$ ではなく，$C\Gamma$ の $F_j{}^i{}_k$ が y^h に依存しないという空間も，実はベアバルド空間にすぎない．というのは，そのとき（43.6），（41.18′）により

$$P_r{}^i{}_{0k}=0=-C_r{}^i{}_{k|0}.$$

よって（42.8）により $G_j{}^i{}_k=F_j{}^i{}_k$ となるから．

条件（$\mathscr{B}$）は（$\mathscr{M}$）の一部分であるから，集合として $\mathscr{B}\subset\mathscr{M}$ である．さらに条件（$\mathscr{B}$）をゆるめて，

$$C_{hij|0}=0 \tag{$\mathscr{L}$}$$

をみたす空間の集合 $\mathscr{L}$ がえられる．これを**ランズベルグ空間**というが，これは明らかに $F_j{}^i{}_k = G_j{}^i{}_k$ の条件である．

Georg Landsberg はドイツのキール大学の教授であった．Finsler の学位論文より約 10 年以前に，変分学の幾何的取扱いを示した論文を発表した．そこには 2 次元ではあるが上の条件（$\mathscr{L}$）がみられる．それは，ふつうの曲面論におけるガウス・ボンネの積分定理が成り立つものとして登場する． ランズベルグ空間という名前は 1928 年の Berwald の講演に初めてみられるようであるが，Berwald はリッチの公式（$g_{ij|k}=0$）が成り立つ空間と述べている．もちろん $B\Gamma$ について $g_{ij|k}=0$ であるが，これは（43.18）から明らかである．

$\mathscr{L}$ の条件（$\mathscr{L}$）は，(43.7) により，捩率 $P_{kij}=0$ ではあるが，実は曲率 $P_{hijk}=0$ と同じである．それは

$$(44.7)\qquad P_{hijk} = \frac{\partial P_{ijk}}{\partial y^h} - \frac{\partial P_{hjk}}{\partial y^i} + C_i{}^r{}_k P_{rhj} - C_h{}^r{}_k P_{rij}$$

と（43.2）の第 2 式から明らかである．上式を証明しよう．(43.7）から

$$P_{ijk}|_h - P_{hjk}|_i = (C_{ijk|r}|_h - C_{hjk|r}|_i)y^r + C_{ijk|h} - C_{hjk|i}$$

がえられるが，リッチの公式（41.10）によって，右辺の第 1 項は

$$(C_{ijk}|_h - C_{hjk}|_i)_{|r}y^r$$

に等しく，$C_{ijk}|_h - C_{hjk}|_i$ は明らかに 0 であるから，(43.6) を用いて (44.7) がえられる．

以上をまとめて，特殊なフィンスラー空間の一系列の包含関係

$$\mathscr{L} \supset \mathscr{B} \supset \mathscr{M} \cup \mathscr{R}$$

がえられたが，この系列は

（1） $C\Gamma$ と $B\Gamma$ が一致する， （2） $C\Gamma$ の曲率 $P_{hijk}=0$

のいずれかで特徴づけられる．現代では意味が明らかでない曲率 P_{hijk} が消える空間である．

$C\Gamma$ の他の 2 つの曲率 R_{hijk}, S_{hijk} についてみよう．R_{hijk} は，空間がもしリーマン空間であればリーマン空間の曲率テンソルであり，その意味である程度その役割が理解できるのではないか． S_{hijk} は § 43 でみたように，ある意味でリーマン曲率そのものである．しかし $g_{ij}(x,y)$ の y^k による 2 次微係数を

含まない ((43.5) 参照) ゆえに，幾つかの注目すべき性質をもつようである．

曲率 P_{hijk} は長い間無視されてきたのではないか． フィンスラー空間がリーマン的でないことの最大の特徴がこのテンソルの役割ではないだろうか．今後の研究が期待される．

§ 45. 定曲率フィンスラー空間

この節は単なる試みにすぎない．リーマン幾何学ではすべて話がうまくゆくこの定曲率の概念が，フィンスラー幾何学ではいまだに納得のゆく定義がえられないのである．

カルタンの接続 $C\Gamma$ について，(27.1) のように，

$$R_{hijk}=K(g_{hj}g_{ik}-g_{hk}g_{ij}) \tag{45.1}$$

をみたすスカラー $K(x,y)$ があるとき， 空間は定曲率であるということにしたい． リーマン幾何学からみて自然な考えである． $C\Gamma$ ではなく， $R\Gamma$ の $R^{(0)}{}_{hijk}$，また $B\Gamma$ の $R^{(b)}{}_{hijk}$ を用いてもよい．

ただし，まず次のことに注意しなければならない．リーマン空間の曲率テンソル R_{hijk} は，恒等式

(1) $R_{hijk}=-R_{ihjk}$, (2) $R_{hijk}=-R_{hikj}$, (3) $\mathfrak{S}_{ijk}\{R_{hijk}\}=0$

をみたした． $g_{hijk}=g_{hj}g_{ik}-g_{hk}g_{ij}$ もこれらをみたす．したがって (45.1) は，R_{hijk} がみたすべきこれらの恒等式にさらに新しい恒等式をただちに追加するものではない．ところが $C\Gamma$ の R_{hijk} は (3) をみたさず， $R\Gamma$ の $R^{(0)}{}_{hijk}$, $B\Gamma$ の $R^{(b)}{}_{hijk}$ は (1) をみたさない． したがって (45.1) はそれ自体，ただちに代数的な追加条件を与えてしまうのである．リーマン空間におけるよりも強い条件である．

$C\Gamma$ の場合，2次元では (45.1) は常に成り立つ．というのは，上の (1), (2) から明らかである

定義 (45.1) が実は好ましくないということは，1963年に H. Akbar-Zadeh が証明した次の定理から明らかになる．

定 理 次元 $n\geqq 3$ で (45.1) が成り立てば，

(1) K は定数である．

(2) $K\neq 0$ ならば，$P_{hijk}=P_{hikj}$, $S_{hijk}=0$.

この定理と § 37 で述べた Brickell の定理と組合せれば，その定理の L に

対する条件をみたし， $K \neq 0$ ならば空間はリーマン空間になってしまうではないか.

証明しよう. ビアンキの恒等式 (41.24) に y^k を掛ければ，(45.1) を代入して

$$K|_i(y_j y^h - L^2\delta^h_j) - K|_j(y_i y^h - L^2\delta^h_i) = 0$$

がえられ， h と j について加えて， K が y について正斉0次であることにより

$$L^2(n-2)K|_i = 0$$

がえられる. ゆえに $n \geqq 3$ としたから， $K|_i = \dfrac{\partial K}{\partial y^i} = 0$ がえられる. $K = K(x)$ となったが, x^i にも依存しないことは，ビアンキの恒等式 (41.22) から，リーマン幾何学におけるとほぼ同様 (§ 27) に証明されよう.

次に (45.1) を (41.22) に代入すれば,

$$K \cdot \mathfrak{S}_{jkl}\{y_j(P_h{}^i{}_{kl} - P_h{}^i{}_{lk})\} = 0$$

となり，$K \neq 0$ なら $P_h{}^i{}_{kl} = P_h{}^i{}_{lk}$ がすぐ示される. そこで, (41.25) で, i, j, k を循環させてえられる2式をそれに加えれば,

$$\mathfrak{S}_{ijk}\{S_l{}^h{}_{kr}R_i{}^r{}_j + R_l{}^h{}_{jk}|_i\} = 0$$

がえられるが, 今は (45.1) より $R_l{}^h{}_{jk}|_i = 0$ であるから, 上式は

$$K \cdot \mathfrak{S}_{ijk}\{y_i S_l{}^h{}_{jk}\} = 0$$

となり，これから $S_l{}^h{}_{jk} = 0$ がすぐ示され，証明が終った.

それでは (45.1) において $K=0$, すなわち $R_{hijk} = 0$ のときはどうか. これはリーマン幾何学における局所平坦性にあたるが，フィンスラー幾何学では特に書くべきほどの結果は何も知られていない. 基本関数 L がどのように特殊な形をしているのであろうか.

さて， Berwald も定曲率概念の定義に苦労したのであろう. これから書くことは, § 35 で述べた彼の遺稿の1つに発表されたものである.

リーマン幾何学では， 点 p において1次独立な2つのベクトル X^i, Y^i が与えられたとき， p から出発して方向が X^i と Y^i の1次結合であるような

すべての測地線を考えれば，p を含む2次元部分空間がえられる．この部分空間のガウスの曲率 K が

$$K=\frac{R_{hijk}X^hY^iX^jY^k}{(g_{hj}g_{ik}-g_{hk}g_{ij})X^hY^iX^jY^k}$$

で与えられることがわかっている．これを，X^i と Y^i で定まる 2 次元断面の **断面曲率** という．これは一般に点 p だけでなく，この断面の取り方にも依存する関数であるが，断面の取り方に依存しないとき，条件式（27.1）がえられ，空間は定曲率になる．

Berwald はこれと平行的に考えた．ただし，フィンスラー空間の曲率テンソルは支持線素 y^i にも依存するから，上の X^i と Y^i の一方を支持線素にとる．すなわち，$B\Gamma$ について

$$K(x,y,X)=\frac{R^{(b)}{}_{hijk}(x,y)y^hX^iy^jX^k}{(g_{hj}g_{ik}-g_{hk}g_{ij})y^hX^iy^jX^k} \tag{45.2}$$

を，y^i と X^i で定まる断面曲率とよび，これが X^i に依存しないとき，空間は **スカラー曲率 $K(x,y)$ をもつ** といい，さらに K が定数のとき，空間は **定曲率 K をもつ** と定義した．

さて，(45.1) が導かれるであろうか．まず

$$R^{(b)}{}_{hijk}y^hy^j=R_{hijk}y^hy^j, \tag{45.3}$$

すなわち，断面曲率は $C\Gamma$ の R_{hijk} を用いて定義しても同じであることを示そう．(41.16) と $N^i{}_j=F_0{}^i{}_j=G_0{}^i{}_j$ とから，

$$R_i{}^h{}_j=R^{(b)}{}_i{}^h{}_j \tag{45.4}$$

がえられる．したがって (43.9) は

$$R^{(b)}{}_i{}^h{}_{jk}=\frac{\partial R_j{}^h{}_k}{\partial y^i} \tag{45.5}$$

と書ける．$R_j{}^h{}_k$ は y について正斉1次であるから，上式より

$$y^iR^{(b)}{}_i{}^h{}_{jk}=R_j{}^h{}_k. \tag{45.6}$$

これと (43.2) の第1式より (45.3) は明らかである．

したがって，(45.2) の分子の，$B\Gamma$ の $R^{(b)}{}_{hijk}$ を，$C\Gamma$ の R_{hijk} でおきかえ，また，テンソル

(45.7)
$$h_{ij}=g_{ij}-\frac{1}{L^2}y_iy_j$$

を用いれば，(45.2) は

$$(R_{i0k}-KL^2h_{ik})X^iX^k=0$$

となる．よってスカラー曲率である条件は，X^i の任意性により

$$R_{i0k}+R_{k0i}-2KL^2h_{ik}=0$$

である．ところが (41.20) からすぐ

(45.8)
$$\mathfrak{S}_{ijk}\{R_{ijk}\}=0$$

がえられ，したがって，$R_{0jk}=0$ を用いて $R_{i0k}=R_{k0i}$ がえられ，スカラー曲率の条件は

(45.9)
$$R_{i0k}=KL^2h_{ik}$$

と書ける．

これをさらに，今後のために便利な式に変形しよう．(45.9) を y^j で共変微分する．ここに

(45.10)
$$h_{ik}|_j=-\frac{1}{L^2}(h_{ij}y_k+h_{kj}y_i).$$

また，

$$R_{i0k}|_j=R_{irk}|_jy^r+R_{ijk}$$

であるが，さらに (45.5) を用いて

$$\begin{aligned}R_{irk}|_jy^r&=\left(\frac{\partial R_{irk}}{\partial y^j}-R_{srk}C_i{}^s{}_j-R_{isk}C_r{}^s{}_j-R_{irs}C_k{}^s{}_j\right)y^r\\&=g_{is}\frac{\partial R_r{}^s{}_k}{\partial y^j}y^r+2C_{ijr}R_0{}^r{}_k-R_{r0k}C_i{}^r{}_j-R_{i0r}C_k{}^r{}_j\\&=g_{is}R^{(b)}{}_j{}^s{}_{0k}+R_{r0k}C_i{}^r{}_j-R_{i0r}C_k{}^r{}_j.\end{aligned}$$

最後の2つの項は (45.9) によって消し合う．こうして結局

(45.11)
$$R^{(b)}{}_{ji0k}+R_{ijk}=(L^2K|_j+2Ky_j)h_{ik}-K(h_{ij}y_k+h_{kj}y_i)$$

がえられる．さらに，$B\Gamma$ では $C^{(b)}{}_j{}^i{}_k=0$ だから，(41.20) は

(45.12)
$$R^{(b)}{}_{jikl}+R^{(b)}{}_{kilj}+R^{(b)}{}_{lijk}=0$$

となる．これに y^l を掛けて，(45.6) により

$$-R^{(b)}{}_{j0k}+R^{(b)}{}_{k0j}+R_{ijk}=0$$

となり，(45.11) からえられる $R^{(b)}{}_{j0k}$ をこの式の最初の2項に代入して，

$$3R_{ijk}=L^2(K|_j h_{ik}-K|_k h_{ij})+3K(y_j h_{ik}-y_k h_{ij}) \tag{45.13}$$

がえられる．逆に，この式に y^j を掛ければ，$h_{ij}y^j=0$ によってすぐもとの (45.9) へもどることができる．ゆえに (45.13) が**スカラー曲率をもつための必要十分条件**である．

定曲率であるとする．明らかに (45.13) より

$$R_{ijk}=K(y_j h_{ik}-y_k h_{ij}) \tag{45.14}$$

がえられるが，さらに美しい式がえられる．まず (45.7) により，上式は

$$R_{ijk}=K(y_j g_{ik}-y_k g_{ij}) \tag{45.14'}$$

とも書ける．これを y^h で共変微分する．$y_j|_h=g_{jh}$ に注意し，また，(45.5) によって

$$\begin{aligned}R_{ijk}|_h&=\frac{\partial(g_{ir}R_j{}^r{}_k)}{\partial y^h}-R_{rjk}C_i{}^r{}_h-R_{irk}C_j{}^r{}_h-R_{ijr}C_k{}^r{}_h\\&=2C_{irh}R_j{}^r{}_k+g_{ir}R^{(b)}{}_h{}^r{}_{jk}-R_{rjk}C_i{}^r{}_h-R_{irk}C_j{}^r{}_h-R_{ijr}C_k{}^r{}_h.\end{aligned}$$

ここに第2項以外は (45.14′) を代入すれば消える．ゆえに (45.14′) より

$$R^{(b)}{}_{hijk}=K(g_{hj}g_{ik}-g_{hk}g_{ij}). \tag{45.15}$$

これから逆に (45.14) がえられ，K が定数となることも，(45.1) におけると同様にして示されよう．上式が**定曲率をもつための条件**である．

(45.15) はまったく美しい式であるが，(45.1) と異なり，$B\Gamma$ の曲率テンソルが現われたということは，Berwald の接続 $B\Gamma$ のよさを如実に表わしたとみてよいかもしれない．しかし，(27.1) から (31.6) へ到達できた美しい理論に対応するものは，いまだに誰も示しえないのである．

しかし次のような反論が予想される．(27.1) から (31.6) へゆく道は，共形変換論に基づいているのだ．フィンスラー幾何学でも共形変換論を建設すれば，うまくゆくにちがいないのではないか．

そうかもしれない．しかし不幸な事情が古くから知られている．1929 年にアメリカの M. S. Knebelman が次のことを証明した．もし，同じ空間の2つ

のフィンスラー基本テンソル $g_{ij}(x,y), \bar{g}_{ij}(x,y)$ の間に，(28.2) のように

$$\bar{g}_{ij}(x,y)=\lambda(x,y)g_{ij}(x,y)$$

という関係があれば，実は λ に y^i が含まれない．証明は簡単である．y^k で偏微分して

$$\bar{C}_{ijk}=\frac{1}{2}\frac{\partial\lambda}{\partial y^k}g_{ij}+\lambda C_{ijk}.$$

これに y^j を掛けて

$$0=\frac{1}{2}\frac{\partial\lambda}{\partial y^k}y_i.$$

よって $\partial\lambda/\partial y^k=0$. こうして，$\lambda$ は少しも一般化されない．

また，$\lambda=\lambda(x)$ としても，リーマン幾何学のように共形曲率テンソルという美しいものはいまだにえられない．こうして，フィンスラー幾何学においては，共形変換論は多くの小さな結果がみつかってはいるが，特に書くべき結果はない．定義そのものから考え直さなければならないのではないかと思われる．

§ 46. 接リーマン空間

この節は § 37 の続きである．そこでは，フィンスラー空間 M の点 $\mathrm{p}=(x^i)$ における接空間 M_{p} に，リーマン計量

$$g_{ij}(x,y)dy^idy^j$$

が考えられ，M_{p} はリーマン空間とみられる．$C_j{}^i{}_k(x,y)$ はこの計量から作られたクリストフェルの記号であり，曲率テンソル S_{hijk} は特に簡単な形 (37.3) をしている．2次元ではいつでも S_{hijk} は0である．そうして Brickell の定理，Deicke の定理が成り立つことを述べた．

さらに，M_{p} の座標 (y^i) は定数係数の斉1次変換しか許容されないので，一般な座標変換を用いて証明されるリーマン空間の定理を M_{p} にそのまま適用することはできないという注意もした．すなわち，$S_{hijk}=0$ なら，適当に座標 $\bar{y}^a$ をとれば，$\bar{g}_{ij}(x,\bar{y})$ が $\bar{y}^a$ を含まないようにできるなどは嘘である．さらにたとえば，M_{p} の共形曲率テンソルは (29.11) と同様に S_{hijk} を用いて定義できるが，それが0で，次元 $n\geqq 4$ であれば，共形的に平坦であると

いうことも断言できない．また，

$$S_{hijk}=S^*(g_{hj}g_{ik}-g_{hk}g_{ij}) \tag{46.1}$$

が成り立つときは，M_p は定曲率（たしかに断面曲率は定数になるが）で，基本式が（31.6）となるような座標がとれるということも嘘である．それどころか，（46.1）に y^i を掛ければただちに $S^*=0$，ゆえに $S_{hijk}=0$ となってしまうではないか．

さて，**2 次元**では常に $S_{hijk}=0$ であるが，**3 次元**では

$$L^2S_{hijk}=S(h_{hj}h_{ik}-h_{hk}h_{ij}) \tag{46.2}$$

というスカラー $S(x,y)$ があることをまず証明しよう．左辺に L^2 を掛けたのは，こうすれば，S が y について 0 次正斉次（Cartan のいう proper）となるからである．h_{ij} は（45.7）で与えられた．（46.2）は，リーマン幾何学では 2 次元で（27.1）が常に成り立つという事実に対応するとみられる．これを証明するために，§ 37 で 2 次元の場合を取扱うのに利用した Berwald の理論を，3 次元の場合へ拡張した興味ある手段を用いる．これはハンガリーの Arthur Moór が 1957 年に与えたものであるが，リーマン幾何学には通用しない興味ある方法である．

§ 37 の Berwald の理論とは次のようであった．単位化された支持線素 $l^i=y^i/L(x,y)$ に垂直な単位ベクトル m^i をとり，直交フレーム (l^i,m^i) によってテンソルの性質を調べるのであった．ところが，（37.7）から $LC^i=Im^i$ がえられるから，$I\neq 0$（リーマン空間ではない）のときは，C^i を単位化したものが m^i である．

そこで，3 次元の場合に，l^i について，C^i を単位化したもの

$$m^i=\frac{C^i}{C} \tag{46.3}$$

をとる．C は C^i の長さ $\sqrt{g_{ij}C^iC^j}$ である．$C=0$ では困るが，g_{ij} が正定値であれば，$C=0$ は $C^i=0$．ゆえに Deicke の定理（§ 37）によって空間はリーマンである．以下において空間はリーマンでないとする．

l^i, m^i はこうして垂直な単位ベクトルであり，空間は 3 次元であるから，こ

れらに垂直な単位ベクトル n^i をとれば，接空間 M_p の直交フレーム (l^i, m^i, n^i) がえられる．ただし，単位とか直交とかは支持線素に依存する．すなわち

$$g_{ij}(x,y)l^i m^j = 0, \qquad g_{ij}(x,y)n^i n^j = 1$$

などの意味であり，y^i をとりかえれば，それに応じて l^i, m^i, n^i も変化する．(37.6′) のように

$$g_{ij} = l_i l_j + m_i m_j + n_i n_j. \tag{46.4}$$

さて，(37.7) はどうなるか．$(l^i, m^i, n^i) = (l_{1)}{}^i, l_{2)}{}^i, l_{3)}{}^i)$ とすれば，

$$LC_{ijk} = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} A_{\alpha\beta\gamma} l_{\alpha)i} l_{\beta)j} l_{\gamma)k}, \qquad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3$$

と表わされるはずであるが，$C_{ijk}l^k = 0$ と，C_{ijk} の対称性とから

$$LC_{ijk} = Hm_i m_j m_k + K\mathfrak{S}_{ijk}\{m_i m_j n_k\} + I\mathfrak{S}_{ijk}\{m_i n_j n_k\} + Jn_i n_j n_k$$

がえられよう．しかし，定義 (46.3) を考慮しなければならない．(46.4) により

$$LC_{ijk}g^{jk} = LC_i = (H+I)m_i + (K+J)n_i.$$

ゆえに $K = -J$ で

$$LC = H + I \tag{46.5}$$

がえられる．こうして，

$$LC_{ijk} = Hm_i m_j m_k - J\mathfrak{S}_{ijk}\{m_i m_j n_k\} + I\mathfrak{S}_{ijk}\{m_i n_j n_k\} + Jn_i n_j n_k \tag{46.6}$$

がえられる．これらの H, I, J が，2次元の場合の Berwald の主スカラー I の拡張にあたる．

さて，(46.6) を (37.3) へ代入して計算すれば (46.2) がえられ，スカラー S は

$$S = 2J^2 + I^2 - HI$$

であることがわかる．こうして (46.1) ではなく，(46.2) がえられた．

もし次元 $n \geqq 4$ で (46.2) が成り立てば，S は y^i に依存しないことが，リーマンの場合と同様のビアンキの恒等式 (41.30) を用いて示されよう．

(46.2) の h_{ij} は，(45.7) で与えられ，$h_{ij}y^j = 0$ をみたすから，行列(h_{ij}) の rank は n より小さい．しかし，その rank は $n-1$ である．というのは，

$$g_{ij}=h_{ij}+l_i l_j$$

であるから，もし行列 (h_{ij}) の rank が $n-1$ より小さければ，行列 (g_{ij}) の rank が n より小さくなるからである.

次に M_{p} の中にある基準面

(46.7) $$L(x,y)=1$$

を，§ 32 のように，n 次元リーマン空間 M_{p} の中の超曲面として取扱ってみよう．すなわち，$n-1$ 個のパラメーター u^α $(\alpha=1,\cdots,n-1)$ を用いて，基準面の方程式が

$$y^i=y^i(u^1,\cdots,u^{n-1})$$

で与えられたとしよう．したがって $L(x,y(u))=1$ が成り立つから

$$\frac{\partial L}{\partial y^i}\frac{\partial y^i}{\partial u^\alpha}=0.$$

§ 32 でえられた $n-1$ 個の接ベクトル e_α の成分 $X_\alpha{}^i=\partial y^i/\partial u^\alpha$ と，単位化された支持線素 l_i を用いれば，上式は $l_i X_\alpha{}^i=0$，すなわち，

(46.8) $$g_{ij}X_\alpha{}^i l^j=0$$

となり，(32.5) により，l^i は基準面の単位法線にほかならない．(32.3) で与えられる基準面のリーマン計量 $g_{\alpha\beta}(u)$ は，

$$g_{\alpha\beta}=g_{ij}X_\alpha{}^i X_\beta{}^j=(h_{ij}+l_i l_j)X_\alpha{}^i X_\beta{}^j.$$

ゆえに

(46.9) $$g_{\alpha\beta}=h_{ij}X_\alpha{}^i X_\beta{}^j$$

がえられる．こうして，テンソル h_{ij} は基準面の誘導計量 $g_{\alpha\beta}$ を与え，したがって基準面のリーマン幾何学において根本的役割を演じるであろう.

(46.8) を u^β で微分して，

$$l_i\frac{\partial X_\alpha{}^i}{\partial u^\beta}=-\frac{\partial l_i}{\partial y^j}X_\alpha{}^i X_\beta{}^j$$

となり，これは，$\partial l_i/\partial y^j=h_{ij}/L$ に注意して，(46.9) により，

(46.10) $$l_i\frac{\partial X_\alpha{}^i}{\partial u^\beta}=-g_{\alpha\beta}$$

となる．ところがガウスの方程式 (32.9)，すなわち

$$\frac{\partial X_\alpha{}^i}{\partial u^\beta} + X_\alpha{}^j C_j{}^i{}_k X_\beta{}^k - X_\gamma{}^i \Gamma_\alpha{}^\gamma{}_\beta = b_{\alpha\beta} l^i$$

に l_i を掛ければ,

$$l_i \frac{\partial X_\alpha{}^i}{\partial u^\beta} = b_{\alpha\beta}.$$

ゆえに基準面の第2基本テンソル $b_{\alpha\beta}$ は,(46.10)により, $-g_{\alpha\beta}$ であることがわかった. したがってガウスの公式(32.12)は

$$S_{hijk} X_\alpha{}^h X_\beta{}^i X_\gamma{}^j X_\delta{}^k - R_{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma} - g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} \tag{46.11}$$

となる. $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ は基準面の曲率テンソルである.

$b_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta}$ がえられたが,(15.14)と比較すればこれは重要である. その接空間は曲がったリーマン空間ではあるが, その中で基準面は半径1の球面のようなものであるということになる.

Brickell の定理の仮定 $S_{hijk}=0$ のもとでは,(46.11)は

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma} \tag{46.12}$$

となり, 基準面は曲率1の定曲率リーマン空間であるということになる. 逆に上式が成り立てば, 一般式(46.11)は

$$S_{hijk} X_\alpha{}^h X_\beta{}^i X_\gamma{}^j X_\delta{}^k = 0$$

となる. $S_{hijk} l^k = 0$ は常に成り立つから, S_{hijk} の法線成分は0である. そうして上式は接線成分も0であるということであるから, $S_{hijk}=0$ となる. したがって(46.12)は $S_{hijk}=0$ の必要十分条件である. ゆえに Brickell の定理は大体をいえば, 基準面が曲率1の定曲率空間であれば, フィンスラー空間は実はリーマンであるということを主張しているのである. このように, 基準面の振舞いがフィンスラー空間に大きな影響を与えることがわかる.

次に,(46.11)に $g^{\beta\delta}$ を掛けて

$$S_{hj} X_\alpha{}^h X_\gamma{}^j - R_{\alpha\gamma} = -(n-2) g_{\alpha\gamma}. \tag{46.13}$$

ここに $S_{hj}, R_{\alpha\gamma}$ はそれぞれ M_{p}, 基準面のリッチテンソル(§ 27)である.

予　想:次元 $n \geqq 4$ であるフィンスラー空間において,(46.2)が成り立てば, 空間はリーマンである. ただし Brickell の定理(§ 37)の

仮定（i），（ii）をみたすとする．

ある人はこれを正しいと主張するが，著者にはその証明が理解できない．正しくないという人もいるが，いまだ反例が知られていない．ある条件のもとでは正しいのかもしれない．

定 理　接空間がアインシュタイン空間である**4次元**フィンスラー空間はリーマンである．ただし Brickell の定理の仮定（i），（ii）をみたすとする．

証明しよう．(30.10) により，$S_{hj}=\dfrac{\sigma}{4}g_{hj}$ というスカラー σ がある．l^j を掛けてすぐに $S_{hj}=0$ がえられるから，(46.13) は $R_{\alpha\gamma}=2g_{\alpha\gamma}$ となり，基準面はアインシュタイン空間である．ところで基準面の次元は 3 だから，§ 30 の定理により，基準面は定曲率であり，曲率を K とすれば，

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}=K(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}-g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma})$$

となる．これを (46.11) へ代入して

$$S_{hijk}X_\alpha{}^hX_\beta{}^iX_\gamma{}^jX_\delta{}^k=(K-1)(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}-g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma})$$

がえられる．右辺に (46.9) を代入し，S_{hijk}, h_{ij} がともに法線成分は 0 であることにより，(46.2) がすぐ示される．しかし $S_{hj}=0$ から $S=0$，したがって $S_{hijk}=0$ がえられるから，Brickell によって証明された定理により，空間はリーマンである．

Brickell の定理における基本関数 $L(x,y)$ はふつうの仮定をみたし，特に $g_{ij}\lambda^i\lambda^j$ は正定値（§ 40）としている．一般相対性理論においては，正定値でない計量が必要なのであるから，フィンスラー幾何学をその理論へ応用するさいに，上の定理は障害にならない．というよりもむしろ，正定値でない計量を考えるべきであるという理由づけになっている．

上のように基準面の性質は大変重要であるが，それはフィンスラー空間の接空間の曲率 S_{hijk} の性質によって決定するのである．S_{hijk} は x の方を固定した $g_{ij}(x,y)$ からえられる曲率テンソルである．ところがリーマン空間 M の場合には，x を固定して $g_{ij}(x)$ からえられる接空間 M_{p} の幾何学はユークリッド幾何学であり，各点 p における M_{p} のユークリッド幾何学を接合してゆくために，ユークリッド接続という概念が必要だったのであるとみられなくもない．

これと平行的にフィンスラー空間 M を考えれば，各接空間 M_{p} のリーマン幾何学を接合してゆくためにリーマン接続とでもいうべき概念が必要であるということになる．このリーマン接続とは何か．著者の気持としては，このリーマン接続の過程で，Cartan の曲率 P_{hijk} が入ってくる．§ 44 で取扱った系列の特殊空間（$P_{hijk}=0$）では，この過程が何かひどく簡単なのであろう．このようにして，各点におけるリーマン幾何学が接合されてできた全体において，Cartan の曲率 R_{hijk} が初めて登場するのではないか．

このリーマン接続の概念がどのように数学的に formulate されるのであろうか．現在の段階では著者はまったく知らないが，フィンスラー幾何学研究における最も重要な問題の一つであろう．

§ 47. ミンコウスキー幾何学

局所ミンコウスキーという概念を § 44 で与えたときに，ミンコウスキー幾何学とは何かということを述べた．すなわち，n 次元ベクトル空間（ユークリッド空間でもよい）において，ある条件をみたす基本関数 $L(y)$ が与えられたとき，$L(y)=1$ をみたす $y=(y^i)$ を単位長とする幾何学が，ミンコウスキー幾何学である．

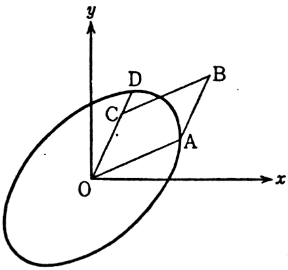
前節では，フィンスラー空間 M の点 $\mathrm{p}=(x^i)$ を固定して，M_{p} にリーマン計量 $g_{ij}(x,y)dy^i dy^j$ を与えて，M_{p} およびその基準面 $L(x,y)=1$ の性質を調べた．しかし M の幾何学は，リーマン幾何学のように $g_{ij}(x)$ ではなく，$L(x,y)$ が a priori に与えられたのである．$\mathrm{p}=(x^i)$ を固定すれば，M_{p} は基本関数 $L(x,y)$（x は固定）が与えられたミンコウスキー空間ではないか．したがって，各ミンコウスキー空間 M_{p} のミンコウスキー接続とでもいうべき概念を考えるべきである．

§ 44 で述べたように，Busemann, Rund 等の主張は上のように考えられる．Busemann は，その考えにしたがって，リーマン幾何的方法ではなく，テンソルの大森林にまったく関係なく，フィンスラー幾何学を独自に建設してきた．他方，Rund の方は何といってもリーマン幾何学的である．1956 年の河口商次の論文では，点 p における接空間 M_{p} の変換群であって，その基準面を不変に保つものを提示している．この考え方は，Klein の“群と幾何学”という思想にしたがった優れた着想である．

以下において，2 次元ミンコウスキー幾何学を，1958 年の Detlef Laugwitz

の興味ある講演を参考にして述べてみよう.

基本関数 $L(y)$ は, § 40 で与えた条件をみたすものであるが, ここでは対称性を仮定する. 微分可能性は大体必要ではない.



5-4 図

ふつうの xy 平面 (直交座標系がとられたユークリッド平面) において, 原点 O を中心として楕円のような凸閉曲線を考え, その方程式を

(47.1)　　　$L(x,y)=1$

としよう. この曲線を **基準線** という. すなわち, この曲線上の任意の点 A に対して, OA$=1$ という計量を考える. 計量以外の, たとえば平行移動などは, すべてユークリッド的に考える. したがって, 図の平行四辺形 OABC については, 辺の長さは

$$\mathrm{CB}=\mathrm{OA}=1,$$
$$\mathrm{AB}=\mathrm{OC}<\mathrm{OD}=1.$$

2点 P,Q について, ユークリッド的長さを特に $\overline{\mathrm{PQ}}$ と表わすことにして, OC のミンコウスキー的長さ OC を,

$$\frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OD}}=\frac{\overline{\mathrm{OC}}}{\overline{\mathrm{OD}}}$$

と定義する. したがって

(47.2)
$$\mathrm{OC}=\frac{\overline{\mathrm{OC}}}{\overline{\mathrm{OD}}}$$

である.

例 5.3 基準線として, 次のような4つの例を考えよう.

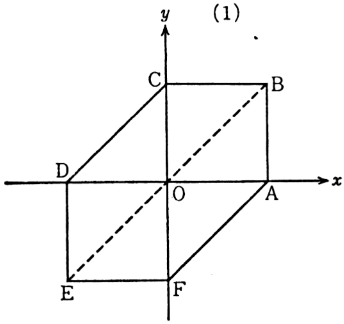
(1) 基準線は六角形 ABCDEF で, $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OC}}=\overline{\mathrm{OD}}=\overline{\mathrm{OF}}=1$ である. ミンコウスキー的長さは $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=\mathrm{OD}=\mathrm{OE}=\mathrm{OF}=1$. ゆえに平行移動によって

$$\mathrm{AB}=\mathrm{OC}=1,\qquad \mathrm{DC}=\mathrm{OB}=1.$$

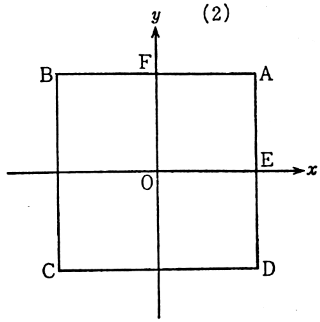
したがって基準線のミンコウスキー的周長は6である.

(2) は, O を中心とする正方形 ABCD が基準線で, $\overline{\mathrm{OE}}=\overline{\mathrm{OF}}=1$ である. ミンコウスキー的長さは

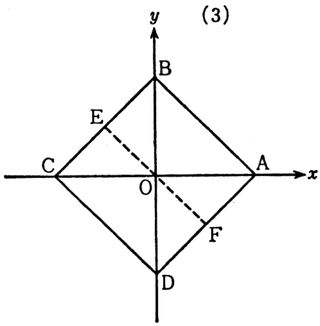
$$\mathrm{EA}=\mathrm{OF}=1.$$



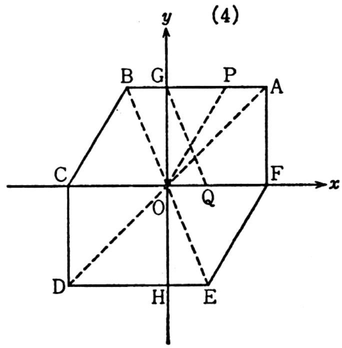
5-5 図



5-6 図



5-7 図



5-8 図

ゆえに基準線のミンコウスキー的周長は8である.

(3) 基準線は, $L(x,y)=|x|+|y|=1$ で与えられる.

$$AB = FE = 2OE = 2.$$

ゆえに基準線のミンコウスキー的周長は8である.

(4) 少し複雑で, 基準線は六角形 ABCDEF であり, 点のユークリッド的座標は $A(1,1)$, $B(-\varepsilon,1)$, $C(-1,0)$, $D(-1,\ -1)$, $E(\varepsilon,-1)$, $F(1,0)$ である. したがって $BC /\!/ EF$ である. ミンコウスキー的長さを考えよう.

$$AG = FO = 1, \qquad AF = GO = 1, \qquad AB > AG = 1.$$

そこで点 P, Q を図のように,

$$CB /\!/ OP, \qquad BO /\!/ GQ$$

ととる.

$$BG = OQ < OF = 1.$$

(47.2) により $OQ=\varepsilon$ がえられるから, $AB=1+\varepsilon$. また,

$$BC = PO = 1.$$

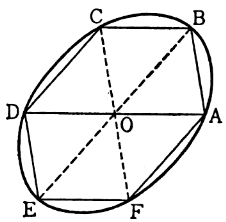
ゆえに基準線のミンコウスキー的周長は $6 + 2\varepsilon$ $(0 < \varepsilon < 1)$ となる．

上の例では，どれも基準線の周長 s は

(47.3)
$$6 \leqq s \leqq 8$$

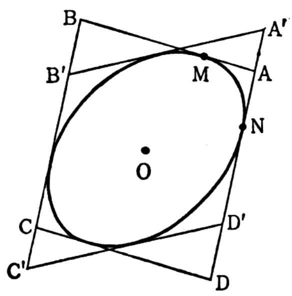
であり，例 5.3 (4) により，6 と 8 の間の任意の数 s を与えて，これを基準線の周長とするミンコウスキー計量があることがわかった．ユークリット計量では，基準線は点 O を中心とする半径 1 の円で，周長は $2\pi = 6.28\cdots$ であることに注意しよう．

ところが，(47.3) は任意のミンコウスキー計量の基準線について成り立つのである．その証明は初等的である．まず $6 \leqq s$ を証明しよう．基準線の中心 O を通る 1 つの直径 AD を引く．AD を上へ平行移動するとその長さは 0 に収束するから，長さが半分になるところがあろう．それを BC とする．O に関する B, C の対称点をそれぞれ E, F とすれば，基準線に上の例 5.3 (1) の図形とよく似た六辺形が内接していることになり，その六辺形の周長は 6 である．ゆえに $6 \leqq s$ が示された．

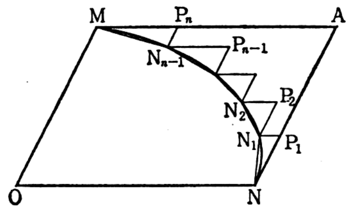


5-9 図

次に，基準線に外接する平行四辺形で面積が最小であるもの ABCD を考える．接点は各辺の中点である．というのは，もし接点 M が AB の中点でなければ，5-10 図のように A, B をそれぞれ A′, B′ にとりかえて，面積を



5-10 図



5-11 図

もっと小さくできるだろう．そこで AB の中点 M，AD の中点 N をとる．そうして $\widehat{\mathrm{NM}}$ 上に点 $\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2, \cdots, \mathrm{N}_{n-1}$，そうしてさらに点 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \cdots, \mathrm{P}_n$ を 5-11 図のようにとって，たとえば

$$\mathrm{N_1P_2} \,/\!\!/\, \mathrm{NA}, \qquad \mathrm{N_2P_2} \,/\!\!/\, \mathrm{MA}$$

とする．明らかに

$$\mathrm{NP_1} + \mathrm{N_1P_2} + \cdots + \mathrm{N}_{n-1}\mathrm{P}_n = \mathrm{NA},$$
$$\mathrm{P_1N_1} + \mathrm{P_2N_2} + \cdots + \mathrm{P}_n\mathrm{M} = \mathrm{AM}$$

が成り立つ．ABCD は例 5.3 (2)と同様で，周長は 8 であり，したがって三角不等式により

$$\mathrm{NN_1} + \mathrm{N_1N_2} + \cdots + \mathrm{N}_{n-1}\mathrm{M} \leqq \mathrm{MA} + \mathrm{AN} = 2.$$

n を ∞ にして限りなく細かく分割して，$\dfrac{s}{4} \leqq 2$ が証明された．

(47.3) は，こうして，2次元ミンコウスキー計量の基準線の周長について成り立つ，誠に興味のある不等式であるが，計量が対称であるという仮定が証明に本質的にきいていることに注意しよう．

ミンコウスキー計量に基づいて，角，面積，また三角関数等が考えられよう．Herbert Busemann, Woldemal Barthel，また那須靖雄等によって研究され，さらに，非常に一般な距離空間の理論が展開された．しかし，それはテンソルを用い，接続を与えて空間の性質を考えるという，いわゆる微分幾何的な幾何学ではないといえよう．

§ 48. 2次元フィンスラー空間

リーマン幾何学においても，2次元の場合は，一般次元の場合には必ずしも成り立たない特殊な性質がある．たとえば，

(1) 曲率テンソル R_{hijk} は常に

$$R_{hijk} = K(g_{hj}g_{ik} - g_{hk}g_{ij})$$

と表わされる ((27.1) 参照)．

(2) ds^2 が

$$ds^2 = C^2(u, v)(du^2 + dv^2)$$

と書ける座標 (u, v) があり，したがって共形的平坦である（(21.5) 参照）．また，次元が3の場合にも，たとえば共形曲率テンソルは常に0であるという特殊な性質がある（§ 30 参照）．

フィンスラー幾何学においても， 2次元については面白いことが Berwald によって古くから知られており，3次元の場合は A. Moór と著者によって最近特殊な理論が展開された．ここでは2次元フィンスラー空間を考えよう．

すでに § 37 において少し述べた．すなわち， 単位化された支持線素 $l_i = \partial L/\partial y^i$ $(l^i = y^i/L)$ に垂直な単位ベクトルを m_i とすれば，

(48.1) $$g_{ij} = l_i l_j + m_i m_j,$$

(48.2) $$LC_{ijk} = I m_i m_j m_k.$$

このスカラー I を主スカラーという．Cartan の曲率テンソル S_{hijk} は恒等的に0である．§ 45 で

(48.3) $$R_{hijk} = K(g_{hj} g_{ik} - g_{hk} g_{ij})$$

が成り立つことも注意した．

さて，$C\Gamma$ を考えて，

(48.4) $$l^i{}_{|j} = 0$$

は明らかである．そこで

$$l^i = e_{0)}{}^i, \qquad m^i = e_{1)}{}^i$$

とおけば，

$$g_{ij} e_{\alpha)}{}^i e_{\beta)}{}^j = \delta_{\alpha\beta}, \qquad \alpha, \beta = 0, 1$$

が成り立つから，x^k で共変微分して

$$g_{ij} e_{\alpha)}{}^i{}_{|k} e_{\beta)}{}^j + g_{ij} e_{\alpha)}{}^i e_{\beta)}{}^j{}_{|k} = 0.$$

ここで $\beta = 1$ とし，$\alpha = 0, 1$ として考えれば，(48.4) により

(48.5) $$m^i{}_{|j} = 0$$

がえられる．

次に，

$$l^i|_j = \left(\frac{y^i}{L}\right)\Big|_j = \frac{1}{L}(\delta^i_j - l^i l_j),$$

ゆえに (48.1) により

$$(48.6)\qquad Ll^i|_j = m^i m_j$$

がえられた．したがって

$$g_{ij}e_{\alpha)}{}^i|_k e_{\beta)}{}^j + g_{ij}e_{\alpha)}{}^i e_{\beta)}{}^j|_k = 0$$

から

$$(48.7)\qquad Lm^i|_j = -l^i m_j$$

がえられる．

さて，θ を未知関数とする偏微分方程式

$$(48.8)\qquad L\theta|_i = m_i$$

を考えよう．これは積分可能である．というのは

$$(L\theta|_i)|_j = l_j\theta|_i + L\theta|_i|_j = l_j\frac{1}{L}m_i + L\theta|_i|_j$$

であるから，(48.8) の積分可能条件は

$$\frac{1}{L}(m_i l_j - m_j l_i) + L(\theta|_i|_j - \theta|_j|_i) = m_i|_j - m_j|_i$$

であるが，明らかに $\theta|_i|_j - \theta|_j|_i = 0$ だから，上式は (48.7) から成り立つことがわかる．このスカラー θ を次の理由で**ランズベルグの角**という．

このスカラー I は § 44 で述べた Landsberg の古い論文にすでに現われている．しかし，これを活用したのは Berwald である．

この θ は，ユークリッド平面の極座標 (r, θ) の角 θ の一般化であるとみられる．というのは，

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$

すなわち，$\theta = \tan^{-1}(y/x)$ より

$$r\frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{y}{r}, \qquad r\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{x}{r}.$$

これは (48.8) に相当する．r はミンコウスキー的長さ L とみられ，$(-y/r, x/r)$ は単位ベクトル $(x/r, y/r)$ に相当する l^i に垂直だから，m_i とみられる．

さて，基本関数 L とランズベルグの角 θ は接空間 L の座標 (y^1, y^2) の代りと考えられる．というのは，

$$(48.9)\qquad \frac{\partial L}{\partial y^i} = l_i, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial y^i} = \frac{1}{L}m_i$$

であるから，$\partial L/\partial y^i, \partial\theta/\partial y^i$ は1次独立であり，§4 により，(L, θ) は接空間 M_p の曲がった座標と考えられる．また，

$$\frac{\partial y^i}{\partial L} = l^i, \qquad \frac{\partial y^i}{\partial \theta} = Lm^i \tag{48.10}$$

も，逆行列を作ればすぐえられる．

さて，スカラー $f(x, y)$ の共変微係数 $f|_i = \partial f/\partial y^i$ の代りに，$\partial f/\partial L$, $\partial f/\partial \theta$ を考える．(48.10) により

$$\frac{\partial f}{\partial L} = \frac{\partial f}{\partial y^i}\frac{\partial y^i}{\partial L} = \frac{\partial f}{\partial y^i} l^i,$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial y^i}\frac{\partial y^i}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial y^i} Lm^i.$$

ゆえに

$$\frac{\partial f}{\partial L} = f|_i \frac{y^i}{L}, \qquad \frac{\partial f}{\partial \theta} = Lf|_i m^i. \tag{48.11}$$

しかし，今後は y^i について正斉0次のスカラー f のみを取扱うので，上式より $\partial f/\partial L = 0$，すなわち f は x^1, x^2, θ のみの関数であることに注意しよう．

$f|_i$ は一般次元の場合と同様であるが，$f|_\alpha$ $(\alpha = 0, 1)$ を

$$f|_i l^i = f|_0, \qquad f|_i m^i = f|_1 \tag{48.12}$$

とする．また $\partial f/\partial \theta$ を単に f_θ と書く．

さて，リッチの公式 (41.9)〜(41.11) に相当する公式を，スカラー f について作ろう．まず (48.4), (48.5) に注意して，$\alpha, \beta = 0, 1$ として

$$f|_{\alpha|\beta} = (f|_i e_{\alpha)}{}^i)|_j e_{\beta)}{}^j = f|_{i|j} e_{\alpha)}{}^i e_{\beta)}{}^j,$$

ゆえに

$$\begin{aligned} f|_{\alpha|\beta} - f|_{\beta|\alpha} &= (f|_{i|j} - f|_{j|i}) e_{\alpha)}{}^i e_{\beta)}{}^j \\ &= (-f|_k R_i{}^k{}_j) e_{\alpha)}{}^i e_{\beta)}{}^j. \end{aligned}$$

これに，(48.3) からえられる

$$R_i{}^k{}_j = K(y_i \delta^k_j - y_j \delta^k_i)$$

を代入して

$$f|_{\alpha|\beta} - f|_{\beta|\alpha} = -KL(l_i f|_j - l_j f|_i) e_{\alpha)}{}^i e_{\beta)}{}^j.$$

これは $\alpha=0, \beta=1$ として，(48.11) により

(48.13)
$$f_{|0|1}-f_{|1|0}=-Kf_{\theta}.$$

特に $f=\theta$ とすれば，$\theta_{\theta}=1$ だから，

(48.14)
$$\theta_{|0|1}-\theta_{|1|0}=-K.$$

これは，ランズベルグの角 θ と曲率 K の関係を示す重要な公式である．曲率が θ で表わされるわけである．また，

$$(f_{|\alpha})_{\theta}-(f_{\theta})_{|\alpha}$$

も計算されよう．

さて，(48.5) を用いて，(48.2) より

$$LC_{ijk|h}=I_{|h}m_i m_j m_k$$

であるから，§ 44 により，2 次元フィンスラー空間がランズベルグ空間であるための条件は

($\mathcal{R}_2$)
$$I_{|0}=0$$

であり，ベアバルド空間であるための条件は

($\mathcal{B}_2$)
$$I_{|h}=0, \quad (h=1,2); \qquad (I_{|\alpha}=0, \quad (\alpha=0,1))$$

である．

主スカラー I に (48.13) を適用して

$$I_{|0|1}-I_{|1|0}=-KI_{\theta}$$

となり，ベアバルド空間であれば，$KI_{\theta}=0$ となる．$K=0$ なら (48.3) により $R_{hijk}=0$ となるから，§ 44 の ($\mathcal{M}$) により，空間は局所ミンコウスキーとなる．そうでなければ，$I_{\theta}=0$ となり，これと $I_{|h}=0$ とによって I は定数となる．逆に I が定数であれば，$I_{|h}=0$ は明らかである．ゆえに，局所ミンコウスキー空間ではない 2 次元ベアバルド空間は，主スカラー I が定数であるということによって特徴づけられる．

1927 年に Berwald は I が定数であるすべての 2 次元空間の基本関数 $L(x, y)$ を決定するという驚くべき美しい理論を発表した．それは，$B=L^2/\sqrt{g}$ が y^i の 2 次型式であるという，なぜ気がついたのか不明なすばらしい着想に基づくものである（リーマン空間では L^2 が y^i の 2 次型式である)．このこ

とは，$\partial^3 B/\partial y^i \partial y^j \partial y^k = 0$ と，B が y^i の斉2次式であるということからしたがう．まず，(37.9),(48.2) により，

$$\frac{\partial B}{\partial y^i} = \frac{L}{\sqrt{g}}(2l_i - Im_i) \tag{48.15}$$

がえられる．

次に (48.2) を y^h で共変微分して (48.7) を用いれば，

$$T_{ijkh} = \frac{L}{I} C_{ijk} I|_h \tag{48.16}$$

がえられる．ここに

$$T_{ijkh} = LC_{ijk}|_h + l_i C_{jkh} + l_j C_{ikh} + l_k C_{ijh} + l_h C_{ijk} \tag{48.17}$$

である．T_{ijkh} はすべての添字について対称なテンソルであるから，(48.16) より

$$C_{ijk} I|_h = C_{ijh} I|_k$$

が成り立たなければならないが，これは (48.2) により $m_k I|_h = m_h I|_k$ のことであるから，

$$I|_h = bm_h \tag{48.18}$$

というスカラー b ($= I|_h m^h = L^{-1} I_\theta$) がある．これを用いて (48.15) より

$$\frac{\partial^2 B}{\partial y^j \partial y^i} = \frac{1}{\sqrt{g}} \{2g_{ij} - I(l_i m_j + l_j m_i) - Lbm_i m_j\} \tag{48.19}$$

がえられる．

次に (48.18) を y^k で共変微分し，$I|_h|_k - I|_k|_h = 0$ より

$$b|_k m_h - b|_h m_k - \frac{b}{L}(l_h m_k - l_k m_h) = 0$$

がえられ，これから

$$b|_k = -\frac{b}{L} l_k + b' m_k \tag{48.20}$$

というスカラー b' ($= b|_h m^h = L^{-1} b_\theta$) があることがわかる．これを用いて (48.19) より

$$\frac{\partial^3 B}{\partial y^k \partial y^j \partial y^i} = -\frac{1}{\sqrt{g}}(Ib + Lb')m_i m_j m_k \tag{48.21}$$

がえられる．ゆえに B が y^i の 2 次式であるということは，$Ib + Lb' = 0$ と同値である．このスカラー $Ib + Lb'$ を考えよう．上に示してきた b, b' の表わし方により，これは $IL^{-1}I_\theta + b_\theta$ であり，よって

$$Ib + Lb' = L^{-1}(II_\theta + I_{\theta\theta})$$

である．これは I が定数であれば 0 である．ゆえに I が定数であれば，B は y^i の 2 次型式である．

そこで I を定数とする．このとき (48.18) より b は消えるから，(48.19) より，

$$a_{ij}(x) = \frac{1}{\sqrt{g}}\left\{g_{ij} - \frac{I}{2}(l_i m_j + l_j m_i)\right\} \tag{48.22}$$

という x^k のみの関数 a_{ij} がある．(48.1) を用いて，行列式の値 $a = |a_{ij}|$ は

$$a = \frac{1}{g}\left(1 - \frac{I^2}{4}\right)(l_1 m_2 - l_2 m_1)^2$$

であることがわかるが，

$$g = (l_1 m_2 - l_2 m_1)^2$$

であるから

$$a = 1 - \frac{I^2}{4} \tag{48.23}$$

がえられる．

次に (37.9), (48.8) より

$$\frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial y^i} = I\frac{\partial \theta}{\partial y^i}$$

がえられるが，I は定数だから，上式を積分して，

$$\sqrt{g} = Je^{I\theta}. \tag{48.24}$$

ここに J は x^i のみの関数である．この I には (48.23) からえられるものを代入する．他方 θ は，(48.8) を積分してえられるわけであるが，m_i は

$l^i=y^i/L$ に垂直な単位ベクトルであるから，

$$m_1=-\lambda y^2, \qquad m_2=\lambda y^1$$

と書ける．これを $g^{ij}m_im_j=1$ に代入し，

$$g^{11}=\frac{g_{22}}{g}, \qquad g^{12}=-\frac{g_{12}}{g}, \qquad g^{22}=\frac{g_{11}}{g}$$

を用いて，$\lambda^2=g/L^2$ となる．したがって (48.8) は

$$\frac{\partial\theta}{\partial y^1}=-\frac{1}{B}y^2, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial y^2}=\frac{1}{B}y^1 \tag{48.25}$$

と表わされる．いまは $B=a_{ij}(x)y^iy^j$ であるから，上式は具体的に積分できる．こうして求まった θ を (48.24) に代入して $\sqrt{g}$ が求まる．ゆえに $L^2=B\sqrt{g}$ より L が求まる．(48.23) は2次型式 B の判別式の $-1/4$ であるから，(48.25) を積分して θ を求めるときに a の符号，したがって I^2 と4との大小関係によって，本質的に異なる3つの基本関数 L がえられるが，こうして**局所ミンコウスキーではない2次元ベアバルド空間がすべて求まった**ことになる．

Berwald 自身の論文には，(48.15), (48.19), (48.21) が書かれているが，(48.21) を導く途中の計算はすべて省略されている．“なぜ B に気がついたのか” と上に書いたが，その理由はおそらく (48.8) を具体的に書いた (48.25) にあるのであろう．それにしても，I が定数のときには B が y^i の2次型式になろうという着想はどこから来たのであろうか．その着想がなければ，(48.21)（右辺に l_i が現われないのは当然である）にいたる複雑な計算をやってみる気は起こらなかったであろう．

Berwald は自分でピアノを弾くことが好きであった．J. S. Bach の前奏曲とフーガが特に好きであった．隣人のラジオの騒音を，ピアノの音でたたきつぶしてやったといって喜んだそうである．彼の隣人の悩みの種であった前奏曲とフーガのように，彼の論文は大芸術であると，著者には感じられるのである．

§49. いくつかの話題

以上でフィンスラー幾何学の大要を述べたつもりであるが，著者個人の興味に偏りすぎたきらいもなくはない．そこで以下において，証明なしに，これまでに書かなかった重要なことに触れておくことにする．

I. 3次元フィンスラー空間

曲率テンソル S_{hijk} は3次元の場合には常に(46.2)の形をしていることを述べた. 3次元の場合には, § 46 で書いたように, 1957 年に Moór が l^i と(46.3)で与えられる m^i と, それらに垂直な単位ベクトルとで構成される直交フレームを利用する方法を提唱した. 最近, 著者はこの方法をさらに徹底させて, 興味のある結果を少しは示した. たとえば, § 45 で定義したスカラー曲率 K をもつ空間と, § 44 のベアバルド空間について,

3次元ベアバルド空間がスカラー曲率 K をもつとする. もしこの空間がリーマン空間でも局所ミンコウスキー空間でもなく, また K が定数でもないとする. (すなわち, 最も一般のスカラー曲率 K をもつベアバルド空間). このとき, K は

$$K=\tau g^{\mu}$$

で与えられる. ここに τ, μ は x^i のみの関数で, g は基本テンソルの行列式である.

換言すれば, K の中の支持線素 y^i のあり方は, g におけるそれと同じである.

II. ランダース計量

§ 40 の例 5.2 でこの計量

$$L(x,y)=\sqrt{a_{ij}(x)y^i y^j}+b_i(x)y^i$$

を考えた. この計量については, 物理学者の多くの論文がある. それらはたいてい, 一般相対性理論にしたがって重力場と電磁場とをいっしょにしてうまく議論しようという, いわゆる統一場理論に属するものである. しかしその他にも, たとえば, ポーランドの物理学者 Roman Stanisłow Ingarden は, 1957 年に, 電子顕微鏡における収差の理論にこの計量を用い, しかも Berwald の定曲率フィンスラー空間の概念を用いて, ある種の, しかも最も現代的な電子顕微鏡でも収差が避けられないことを決論した. 大変興味のある微分幾何的理論が展開されているが, 著者には疑問が残っていると思われる.

幾何学者はこの計量にたいした興味を示してこなかったようである. しかし

その理由は Ingarden が書いたように，

The calculation of $R^{(b)}{}_{hijk}$ for a Randers space corresponding to the general electromagnetic microscope, although straightforward, is, however, so enormously complicated that such a method is unpractical.

ものすごい計算で，まともに計算した人はまだ無いようであるから，力及ばずしてよい論文が書けないわけである．しかし面白い結果がまったく無いわけではない．

Randers の計量は，リーマン計量 $\alpha=\sqrt{a_{ij}(x)y^iy^j}$ と y^i の1次式 $\beta=b_i(x)y^i$ の正斉1次関数

$$L=F(\alpha,\beta)$$

の特殊な場合である．ふつうに考えられる L の条件（§ 40）をみたさないけれども，$F(\alpha,\beta)$ として，特に

$$F(\alpha,\beta)=\frac{\alpha^{r+1}}{\beta^r}, \qquad (r\neq 0,\ -1)$$

という関数も考えられる．ところで，ランダース計量の場合に，Cartan の振率テンソル C_{ijk} は

$$C_{ijk}=\frac{1}{n+1}(C_ih_{jk}+C_jh_{ki}+C_kh_{ij}) \tag{49.1}$$

という形をもつ．ここに $C_i=C_i{}^j{}_j$ で，h_{ij} は (45.7) で与えられる．一般に上式が成り立つようなフィンスラー空間を **C-reducible** ということにすれば，次の重要な結果が知られている．

基本関数が一般の $F(\alpha,\beta)$ である C-reducible なフィンスラー空間は，ランダース計量 $\alpha+\beta$ か，または計量 $\dfrac{\alpha^2}{\beta}$ をもつものに限る．

計量 α^2/β はソ連の V.K. Kropina (1960 年)，その他によって取扱われたものであるが，上の結果は，ランダース計量という天降り式に物理学者によって思いつかれた計量 (Randers 自身はフィンスラー計量とは知らなかった) の幾何的正当性を与えている．

また計量 $F(\alpha,\beta)$ はランズベルグ空間（§ 44）の研究にも多少役立ってい

る．前節でベアバルド空間は2次元の場合に Berwald 自身によってすべて求められたことを述べたが，ランズベルグ空間はいまだに性質がよくつかめない．最近，著者その他によって，2次元で計量が α^{r+1}/β^{r} であるようなランズベルグ空間がすべて求められたが，特にランダース計量については，それがランズベルグ計量であるための必要十分条件は，$b_{i;j}=0$ である．ここに共変微分（;）は，リーマン計量 α から作られるリーマン接続に関するものである．

河口商次は，基本関数がふつうの条件をみたしているとき，もし C-reducible であれば空間はリーマンであるという驚くべき結果を示したが，その証明には，アフィン微分幾何学の結果が利用されていて，著者には理解できない．たしかに，$\alpha+\beta, \alpha^2/\beta$ という基本関数はふつうの条件をみたさない．

III. 曲率テンソルの特殊な形

すでにみてきたように，リーマン幾何学の定曲率の概念からみて，$C\Gamma$ の曲率テンソル R_{hijk} が（45.1）の形

$$R_{hijk}=K(g_{hj}g_{ik}-g_{hk}g_{ij})$$

をしているフィンスラー空間は注目すべきであると思われたが，Akbar-Zadeh によって，このとき $S_{hijk}=0$ となることが証明されてしまった．Berwald の与えた（45.15）の形

$$R^{(b)}{}_{hijk}=K(g_{hj}g_{ik}-g_{hk}g_{ij})$$

についてはそんな結果にならないが，しかし，この形からいまだに著しい結果がえられない．Akbar-Zadeh の定理においても，$R_{hijk}=0$ の場合は除かれている．リーマン空間の場合には平坦であるという条件式 $R_{hijk}=0$ から，フィンスラー空間の場合には，まだ著しい結果がえられていないのである．

曲率テンソル S_{hijk} については，$S_{hijk}=0$ のときの Brickell の定理が著しい．また（46.2）の形

$$L^2S_{hijk}=S(h_{hj}h_{ik}-h_{hk}h_{ij})$$

についても注目すべき結果がえられそうであることをすでに述べた．

それでは，曲率テンソル P_{hijk} についてはどうか．$P_{hijk}=0$ は § 44 の特殊空間を与える．それをランズベルグ空間と称するが，その幾何的性質となる

といまだによくわからない．

それよりも，上の R_{hijk}, S_{hijk} の特殊な形に相当するような P_{hijk} の形はどんなものであろうか．これには次元の小さい場合がモデルになろう．2次元，3次元の場合からそれぞれ上の R_{hijk}, S_{hijk} の形がえられたのであるから．それでは，2次元の場合の P_{hijk} はどうか．

(49.2) $$P_{hijk}=P_iC_{jkh}-P_hC_{jki}$$

という P_i があることがわかるが，一般次元で (49.2) を仮定すれば，すぐに $P_{hijk}=0$ か $S_{hijk}=0$ となってお話にならない．R_{hijk} と g_{ij}，S_{hijk} と h_{ij} の結びつきが強いので，P_{hijk} は g_{ij}, h_{ij} の双方に縁があるのではないかと思われる．

IV. 無限小変換

リーマン幾何学において，空間の変換に応じてその微分幾何的構造がどのように変化し，どれだけ不変に保たれるかという変換論は大変重要である．したがって，フィンスラー幾何学においても変換論が重要であり，あるテンソル等が不変に保たれるという条件から，いろいろ興味のある特殊なフィンスラー空間がえられることも期待される．

1947 年に Wang Hsien-chung が次の基本的な定理を証明した．

n (＞2) 次元フィンスラー空間が $n(n+1)/2$ 個のパラメーターに依存する運動群を許容すれば，空間はリーマン（したがって定曲率）である．

これに次いで多くの人々によって興味ある結果が発表された．特にハンガリーの Gyula Soós は 1954 年以来，アフィン変換群，運動群，相似変換群を研究した．平松仁が 1959 年に示した定理の大要は，

次元 n が 4 でないフィンスラー空間が，$\frac{1}{2}n(n-1)+2$ 個のパラメーターに依存する相似変換群を許容すれば，空間は局所ミンコウスキーである．

ここにリーマンではなく，局所ミンコウスキーが現われたのは興味がある．さらに同年に，田代嘉宏が与えた定理も興味がある．すなわち，

次元 n が 4 でないフィンスラー空間が，$\frac{1}{2}n(n-1)+1$ 個のパラメーターの運動群を許容すれば，その基本関数は，適当に座標系をとれば，

$$f\left((y^1)^2, \frac{w}{\left(1+\frac{K}{4}v\right)^2}\right) \quad \text{または} \quad f((y^1)^2, e^{2kx^1}w)$$

という形に書ける．ここに $f(t_1, t_2)$ は t_1, t_2 について斉1次であり，

$$v=(x^2)^2+\cdots+(x^n)^2,$$
$$w=(y^2)^2+\cdots+(y^n)^2$$

とする．

ここではまだ知られていなかった計量をもつ特殊フィンスラー空間がえられている．しかしフィンスラー空間の変換論では，捩率 C_{ijk} の取扱いがなかなか困難であり，リーマン幾何学におけるほどの美しい結果が多くはえられていない．

変換群論は無限小変換を考えるということによって，リー微分という操作がえられ，テンソルを用いて議論されるようになる．すなわち，点 (x^i) を点

(49.3) $$\bar{x}^i = x^i + X^i(x)dt$$

へ変換する．ここに dt は無限小パラメーター，X^i は考えている空間 M の反変ベクトル野である．フィンスラー幾何学を考える場合には，Cartan の線素空間，いやむしろ (x^i, y^i) の空間 TM（接バンドル）を考える．線素空間では，y^i は比 $y^1:y^2:\cdots:y^n$ だけを問題にするが，TM では n 個の y^i を独立に考える．TM では (49.3) が，(35.9) のように，

(49.4) $$\bar{x}^i = x^i + X^i(x)dt, \qquad \bar{y}^i = y^i + \frac{\partial X^i}{\partial x^j}y^j dt$$

と拡張される．これがいわゆる**拡張された点変換**といわれ，これまでのほとんどすべての研究はこれだけを考えてきたのである．

しかし，われわれはフィンスラー幾何学を考えているのであり，そこでは g_{ij} も R_{hijk} も M 上のではなく，TM 上の関数である．したがって (49.4) においても，成分 X^i が TM 上の関数 $X^i(x,y)$ である反変ベクトル野を考

えるべきではなかろうか．このような観点から，(49.4) は

$$(49.5)\qquad \bar{x}^i = x^i + X^i(x,y)dt, \qquad \bar{y}^i = y^i + \frac{\delta X^i}{\delta x^j} y^j dt$$

と拡張すべきである．ここに $\delta/\delta x^j$ は (41.2) で与えられ，非線形接続 $N^i{}_j$ が与えられて初めて考えうるものである．このようにして，またもや非線形接続の重要さを思い知らされるわけであるが，(49.5) による変換論はまだほとんど研究されていない．

(48.17) で定義されたテンソル T_{ijkh} について興味のある結果がすでにえられているのは，注目すべきことであろう．2次元では，空間がリーマンでない ($C_{ijk} \neq 0$) とき，$T_{ijkh}=0$ と $I|_h=0$ とは同等であることが (48.16) から明らかであろう．そうして，(1,1)-テンソル $X^i{}_j(x,y)$ を用いて，変換

$$(49.6)\qquad \bar{x}^i = x^i, \qquad \bar{y}^i = y^i + X^i{}_j(x,y)y^j dt$$

を **回 転** ということにすれば，$T_{ijkh}=0$ はパラメーターが最大（1つ）の等長回転が許容されるための条件なのである．また，一般次元の場合，河口央商，橘口正夫によって与えられた，ランズベルグ空間の共形変換におけるこのテンソルの振舞いにも注目すべきである．

こうして，フィンスラー空間では，2種の無限小変換 (49.5),(49.6) を取扱うべきであると思われる．

V. 接バンドルへの計量のリフト

上の拡張された変換 (49.5),(49.6) は，接バンドル TM の特殊な変換である．フィンスラー幾何学研究にファイバーバンドルの概念が重要であることはこれまでも述べてきた．(49.6) は，空間の点 (x^i) は動いていないのだから，M 上ではなく，TM ではじめて考えられるものである．

1958 年に佐々木重夫は，リーマン空間 M の接バンドル TM へ，M のリーマン計量をリフトして，TM にリーマン計量を与えてリーマン空間と考えるという，注目すべき概念を与えた．これによって接バンドルの微分幾何学が起こり，リーマン計量ばかりでなく，種々のテンソルや接続が TM へリフトされることになった．

フィンスラー計量も著者によって TM へリフトされた．それは，M のフィンスラー計量

$$ds^2 = g_{ij}(x,y)dx^i dx^j, \qquad g_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 L^2}{\partial y^i \partial y^j}$$

から，TM のリーマン計量 $d\bar{s}^2$ が

$$d\bar{s}^2 = \bar{g}_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \qquad \alpha, \beta = 1, \cdots, 2n$$

で与えられる．ここに $(x^\alpha) = (x^1, \cdots, x^n, y^1, \cdots, y^n)$ で，$\bar{g}_{\alpha\beta}$ は

$$(49.7) \qquad \begin{cases} \bar{g}_{ij} = g_{ij} + g_{kl} N^k{}_i N^l{}_j, \\ \bar{g}_{i(j)} = N^k{}_i g_{kj}, \qquad \bar{g}_{(i)(j)} = g_{ij} \end{cases}$$

と定義される．ここに $(i) = n + i, (j) = n + j$ とした．これによって，M のフィンスラー幾何学に対応して，TM のリーマン幾何学がえられることになるが，これらの間の関係はいまだ十分に研究されたとは言えない．

人 名 索 引

事 項 索 引

ト　ド

ナ

ハ　バ

ヒ　ビ

フ　ブ　プ

ヘ　ベ

リ

ル

レ

ワ

M E M O

M E M O

著者略歴

1920年（大正9年）京都府出身　旧制第三高等学校，京都帝国大学理学部数学科卒　同志社工専助教授，同志社大学工学部助教授，京都大学教養部助教授，同理学部助教授，同教養部教授．

1984年3月　定年制により退官．京都大学名誉教授

1984年4月　聖徳学園岐阜教育大学教授

1987年4月　大阪工大学園摂南大学工学部教授

1992年3月　同退職

理学博士．

1991年6月　ラヨシュ コシュート大学(ハンガリー，デブレッエン)より名誉博士の称号を授与された．

1991年7月　アレキサンダー ヨン クザ大学(ルーマニア，ヤーシイ)より名誉教授の称号を授与された．

主な著書：The Theory of Finsler Connections (Publ. Study Group, Geometry, Vol.5, 1970). Foundations of Finsler Geometry and Special Finsler Spaces (Kaiseisha Press, Saikawa 3-23-2, Otsu-city, Japan). (P. L. Antonelli, R. S. Ingarden and M. Matsumoto) The Theory of Sprays and Finsler Spaces with Applications in Physics and Biology (Fundamental Theories of Physics, Vol. 58) (Kluwer Academic Publications, Dordrecht / Boston / London, 1993).

基礎数学選書 14　　計量微分幾何学

1975年5月20日　第1版発行©
2007年12月10日　第4版2刷発行

検印省略

定価はカバーに表示してあります．

著作者　松本　誠（まつもと まこと）
発行者　吉野達治

発行所　東京都千代田区四番町8番地
電話 東京 3262－9166～9
株式会社 裳華房

印刷所
株式会社デジタルパブリッシングサービス
製本所

社団法人
自然科学書協会会員

JCLS ＜㈱日本著作出版権管理システム委託出版物＞
本書の無断複写は著作権法上での例外を除き禁じられています．複写される場合は，そのつど事前に㈱日本著作出版権管理システム（電話 03-3817-5670，FAX 03-3815-8199）の許諾を得てください．

ISBN978-4-7853-1116-2